В. И. АРНОЛЬД

ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(окончание)

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 196

В. И. АРНОЛЬД

ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(окончание)

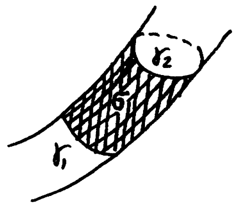
(переиздание стереотипное)

Издательство Московского Университета 1968

ЛЕКЦИЯ 30

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ ПУАНКАРЕ- КАРТАНА

Начнем с элементарного гидродинамического факта. Пусть v – векторное поле в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, $r = \mathrm{rot}\, v$ – поле его роста. Интегральные кривые называются линиями ротора или вихревыми линиями. Пусть γ_1 –замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$. Линии ротора, проходящие через точки γ_1, образуют трубку ротора.



Пусть γ_2 – другая кривая, охватывающая ту же трубку ротора, так что $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial\sigma$, где σ –2-цепь, представляющая часть трубки ротора. Справедлива

ЛЕММА СТОКСА. Циркуляция поля v по обеим кривым γ_1 и γ_2 одинакова:

$$\oint_{\gamma_1} v\, dl = \int_{\gamma_2} v\, dl$$

Доказательство. По формуле Стокса

$\oint_{\gamma_1} v\, dl - \int_{\gamma_2} v\, dl = \iint_{\sigma} \mathrm{rot}\, v\, dn = 0$, т.к. $\mathrm{rot}\, v$ касаются трубки ротора.

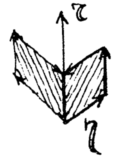
Оказывается, лемма Стокса допускает обобщение на случай любого нечетномерного многообразия M^{2n+1} (вместо $\mathbb{R}^3$). Чтобы сформулировать это обобщение, перейдем от векторных полей к дифференциальным формам.

Циркуляция поля v есть интеграл I-формы

$$\omega^1 : \omega^1(\xi) = (v, \xi$$

Ротору v соответствует 2-

форма $\omega^2 = d\omega^1$: $d\omega^1(\xi,\eta) = (r,\xi,\eta)$. Из этой формулы видно, что в каждой точке существует направление (а именно, направление ротора r) обладающее тем свойством, что циркуляция v по краю всякой "бесконечно-малой площадки", содержащей r , равна нулю:



$$d\omega^1(r,\eta) = 0 \quad \forall \eta$$

Действительно, $d\omega^1(r,\eta) = (r,r,\eta) = 0$.

Замечание. Переход от 2-формы $\omega^2 = d\omega^1$ к полю ротора r не инвариантная операция: она зависит от евклидовой структуры $\mathbb{R}^3$.

Мы утверждаем теперь, что направление ротора, r , инвариантно связано с 2-формой ω^2 (и, значит, с 1-формой ω^1). Действительно, легко проверить, что если $r \neq 0$ то направление r определяется условием $\{\omega^2(r,\eta) = 0 \ \forall \eta\}$ однозначно.

Алгебраической основой многомерной леммы Стокса является существование оси у всякого вращения нечетномерного пространства.

ЛЕММА. Пусть ω^2 - алгебраическая внешняя 2-форма в нечетномерном линейном пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$. Тогда существует вектор $\xi \neq 0$, такой, что

$$\omega^2(\xi,\eta) = 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

Доказательство. Кососимметрическая форма ω^2 задается кососимметрической матрицей A

$$\omega^2(\xi,\eta) = (A\xi,\eta)$$

нечетного порядка $2n+1$. Определитель такой матрицы равен 0, так как

$$A'=-A, \quad \det A=\det A'=\det -A=(-1)^{2n+1}\det A=-\det A$$

Итак, определитель A равен 0. Значит A имеет собственный вектор $\xi\neq 0$ с собственным значением 0, что и требовалось доказать.

Вектор ξ , для которого $\omega^2(\xi,\eta)\equiv 0$ при всех η , называется нулевым вектором формы. ω^2 . Очевидно, все нулевые вектора ω^2 образуют линейное подпространство. Форма называется невырожденной, если размерность этого пространства – минимальная возможная (т.е. I в нечетномерном пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$, 0 в четномерном).

Задача. Рассмотрим в четномерном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n$ 2-форму $\omega^2=\sum_{i=1}^{n}p_i\wedge q_i$. Докажите, что форма ω^2 невырождена.

Задача. Рассмотрим в нечетномерном пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n,t$ 2-форму $\omega^2=\sum_{i=1}^{n}p_i\wedge q_i-\omega^1\wedge t$, где ω^1 – любая I-форма в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Докажите, что форма ω^2 невырождена.

Если ω^2 – невырожденная форма в нечетномерном пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$, то все нулевые вектора ξ формы ω^2 лежат на одной прямой. Эта прямая инвариантно связана с формой ω^2 .

Пусть теперь M^{2n+1} – нечетномерное дифференцируемое многообразие, ω^1 – I форма на M . По предыдущей лемме в каждой точке $x\in M$ имеется направление (т.е.

прямая $c\xi$ в касательном пространстве TM_x) обладающее тем свойством, что интеграл ω^1 по краю "бесконечно-малой площадки содержащей это направление" равен 0:

$$d\omega^1(\xi,\eta)=0 \quad \forall\, \eta\in TM_x$$

Пусть, далее, 2-форма $d\omega^1$ невырождена. Тогда направление ξ определено однозначно. Мы назовем его "направлением ротора" формы ω^1 . Интегральные кривые поля направлений ротора называются "линиями ротора" (или "характеристиками") формы ω^1 .

Пусть γ_1 – замкнутая кривая на M . Линии ротора, выходящие из точек γ_1 , образуют "трубку ротора". Справедлива многомерная лемма Стокса.

Интеграл I-формы ω^1 по любой из двух кривых охватывающим одну и ту же трубку ротора одинаков:

$$\oint_{\gamma_1}\omega^1=\oint_{\gamma_2}\omega^2$$, если $\gamma_1-\gamma_2=\partial\sigma$, σ – кусок трубки ротора.

Доказательство. По формуле Стокса

$$\oint_{\gamma_1}\omega^1-\oint_{\gamma_2}\omega^2=\int_{\partial\sigma}\omega^1=\int_{\sigma}d\omega^1$$

Но значение $d\omega^1$ на любой паре векторов, касательных к трубке ротора, равно 0. (Действительно, эти два вектора лежат в 2-плоскости, проходящей через направление ротора, а на этой плоскости $d\omega^1$ обращается в 0 согласно I).

Итак, $\int\limits_{\sigma} d\omega^1 = 0$, что и доказывает лемму.

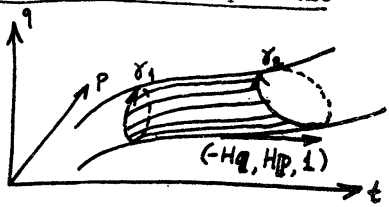
Из леммы Стокса непосредственно вытекают все основные положения гамильтоновой механики.

Рассмотрим в качестве M^{2n+1} "расширенное фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n,t$. Пусть дана функция $H = H(p,q,t)$. Тогда можно составить*) 1-форму

$$\omega^1 = \mathbb{p}\,d\mathbb{q} - H\,dt \qquad (\mathbb{p}\,d\mathbb{q} = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n)$$

Применим к ω^1 лемму Стокса.

ТЕОРЕМА. Линии ротора формы $\omega^1 = \mathbb{p}\,d\mathbb{q} - H\,dt$ в $2n+1$ - мерном расширенном фазовом пространстве $\mathbb{p},\mathbb{q},t$ однозначно проектируются на ось t , т.е. задаются $2n$ функциями $\mathbb{p} = \mathbb{p}(t)$, $\mathbb{q} = \mathbb{q}(t)$. Эти функции удовлетворяют системе канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона H :



(I) $$\frac{d\mathbb{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbb{q}}, \quad \frac{d\mathbb{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbb{p}}$$

Иными словами, линии ротора формы $\mathbb{p}\,d\mathbb{q} - H\,dt$ суть траектории фазового потока в расширенном фазовом пространстве, т.е. интегральные кривые канонических уравнений (I).

---

*) Форма ω^1 кажется взятой с потолка. Мы увидим в следующих лекциях, как идея рассмотреть эту форму возникла из оптики.

1*-1127

<u>Доказательство</u>. Дифференциал **формы** $\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$ равен

$$d\omega^1=\sum_{i=1}^{n}dp_i\wedge dq_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\wedge dt-\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i\wedge dt$$

Из этого выражения видно, что матрица 2-формы $d\omega^1$ в координатах $\mathbf{p},\mathbf{q},t$ имеет вид (проверьте!)

$$A=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c|c|c}0&-E&H_{\mathbf{p}}\\\hline E&0&H_{\mathbf{q}}\\\hline -H_{\mathbf{p}}&H_{\mathbf{q}}&0\end{array}\right)\\ \underbrace{\quad\quad}_{n}\ \underbrace{\quad\quad}_{n}\ \underbrace{\quad}_{1}\end{array},\quad \text{где}\quad E=\underbrace{\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}}_{n},\quad H_{\mathbf{p}}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},\quad H_{\mathbf{q}}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

Ранг этой матрицы равен $2n$ (левый верхний $2n$-угол невырожден). Поэтому 2-форма $d\omega^1$ невырождена. Непосредственно проверяется, что вектор $(-H_{\mathbf{q}},H_{\mathbf{p}},1)$ – собственный вектор матрицы A с собственным значением 0 (проверьте!). Значит он задает направление линий ротора формы $\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$. Но вектор $(-H_{\mathbf{q}},H_{\mathbf{p}},1)$ есть как раз вектор скорости фазового потока (I). Итак, интегральные кривые (I) суть линии ротора формы $\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$, что и требовалось доказать.

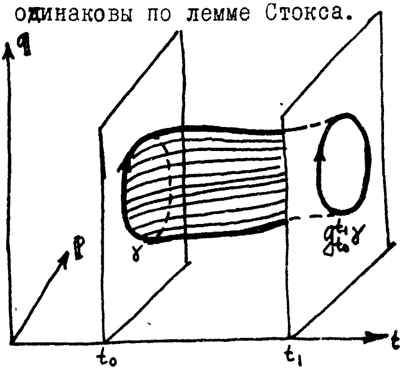
Применим теперь лемму Стокса. Получается фундаментальная

<u>ТЕОРЕМА об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана.</u> <u>Пусть две замкнутые кривые γ_1, γ_2 охватывают одну и ту же трубку фазовых траекторий (I). Тогда интегралы формы $\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$ по ним одинаковы:</u>

$$\oint_{\gamma_1}\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt=\oint_{\gamma_2}\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$$

Форма $pdq - Hdt$ называется интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана[ж)].

Доказательство теоремы. Фазовые траектории суть линии ротора формы $pdq - Hdt$, а интегралы по охватывающим одну трубку ротора замкнутым кривым одинаковы по лемме Стокса. Рассмотрим, в частности, кривые, составленные из одновременных состояний, т.е. лежащие в плоскостях $t = const$.



Вдоль таких кривых $dt = 0$ и $\oint_\gamma pdq - Hdt = \oint_\gamma pdq$. Из предыдущей теоремы получается важное

Следствие I. Фазовый поток сохраняет интеграл формы $pdq = p_1dq_1 + \ldots + p_ndq_n$ по замкнутым кривым.

Действительно, пусть $g_{t_0}^{t_1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ – преобразование фазового пространства p, q, осуществляемое фазовым потоком за время от t_0 до t_1 (т.е. $g_{t_0}^{t_1}(p_0, q_0)$ есть решение канонических уравнений (I) с начальными условиями $p(t_0) = p_0$, $q(t_0) = q_0$). Пусть γ -любая замкнутая кривая в пространстве $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ $(t = t_0)$. Тогда $g_{t_0}^{t_1}\gamma$ есть замкнутая кривая в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ $(t = t_1)$, охватывающая ту же трубку фазовых траекторий в $\mathbb{R}^{2n+1}$. По предыдущей теореме, так как $dt = 0$ на γ и на $g_{t_0}^{t_1}\gamma$, находим $\oint_\gamma pdq = \oint_{g_{t_0}^{t_1}\gamma} pdq$

ж) В вариационном исчислении $\int pdq - Hdt$ называется инвариантным интегралом Гильберта.

что и требовалось доказать.

Форма $p\,dq$ называется <u>относительным интегральным инвариантом Пуанкаре</u>.[ж)] Он имеет простой геометрический смысл. Пусть σ^2 – двумерная ориентированная цепь, $\gamma = \partial\sigma^2$. Тогда находим по формуле Стокса

$$\oint_\gamma p\,dq = \iint_{\sigma^2} dp \wedge dq$$

Итак, доказано важное

<u>Следствие 2</u>. <u>Фазовый поток сохраняет сумму ориентированных площадей проекций поверхности на n координатных плоскостей</u> (p_i, q_i) :

$$\iint_{\sigma^2} dp \wedge dq = \iint_{g^{t_1}_{t_0}\sigma^2} dp \wedge dq$$

Иными словами, 2-форма $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$ является абсолютным интегральным инвариантом фазового потока.

<u>Пример</u>. При $n = 1$ ω^2 есть площадь и мы получаем теорему Лиувилля: фазовый поток сохраняет площадь.

ж) Пусть вообще $g: M \to M$ – гладкое отображение многообразия M. Дифференциальная форма ω называется <u>интегральным инвариантом</u> отображения g (или абсолютным интегральным инвариантом g), если g сохраняет форму ω : $g^*\omega = \omega$ или, что эквивалентно, $\int_{g\sigma}\omega = \int_\sigma \omega$ для любой цепи σ. Дифференциальная форма ω называется <u>относительным интегральным инвариантом</u> g, если для любой замкнутой цепи σ имеем $\int_{g\sigma}\omega = \int_\sigma \omega$. Дифференциал относительного инварианта есть абсолютный инвариант (докажите!).

Пусть g – дифференцируемое отображение фазового пространства $\mathbb{R}^{2n} = \{(p,q)\}$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Определение. Отображение g называется каноническим, если g сохраняет 2-форму $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Из предыдущих рассуждений видно, что это определение можно записать в любом из трех эквивалентных видов:

1) $g^* \omega^2 = \omega^2$ (g сохраняет 2-форму $\sum dp_i \wedge dq_i$)

2) $\iint_{\sigma^2} \omega^2 = \iint_{g\sigma^2} \omega^2 \quad \forall \sigma^2$ (g сохраняет сумму площадей проекций любой поверхности).

3) $\oint_{\gamma} p\,dq = \oint_{g\gamma} p\,dq$ (форма $p\,dq$ – относительный интегральный инвариант g).

Задача. Покажите, что определения 1), 2) эквивалентны 3), если речь идет об отображении односвязной области в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$; в общем случае $3 \to 2 \Leftrightarrow 1$.

Предыдущие следствия теперь можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА. Преобразование фазового пространства, осуществляемое фазовым потоком, каноническое.*)

Пусть $g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ – каноническое преобразование: g сохраняет форму ω^2. Тогда g сохраняет также и внешний квадрат $\omega^2 \wedge \omega^2$ (докажите!):

$$g^*(\omega^2 \wedge \omega^2) = \omega^2 \wedge \omega^2, \ldots\ldots, \quad g^*(\underbrace{\omega^2 \wedge \ldots\ldots \wedge \omega^2}_{k}) = \omega^2 \wedge \ldots\ldots \wedge \omega^2$$

Но мы уже вычисляли (см. предыдущие лекции) степени формы $\sum dp_i \wedge dq_i$: они пропорциональны формам

---

*) Задача. Найдите ошибку в "доказательстве" этой теоремы, приведенном на стр. 182 учебника Ландау и Лифшица.

$$\omega^4=\sum_{i<j} dp_i\wedge dp_j\wedge dq_i\wedge dq_j\ ,\quad \omega^{2k}=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} dp_{i_1}\wedge dp_{i_2}\ldots\wedge dp_{i_k}\wedge dq_{i_1}\ldots\wedge dq_{i_k}$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА. Канонические преобразования сохраняют интегральные инварианты $\omega^4, \ldots, \omega^{2n}$. Геометрически интеграл формы ω^{2k} означает сумму ориентированных объемов проекций на координатные плоскости $p_{i_1}\ldots p_{i_k} q_{i_1}\ldots q_{i_k}$

В частности, форма ω^{2n} пропорциональна элементу объема, и мы получаем

Следствие. Каноническое преооразование сохраняет элемент объема в фазовом пространстве:

объем $(g\mathcal{D})$ = объем $\mathcal{D}$ для любой области $\mathcal{D}$.

В частности, в применении к фазовому потоку получаем

Следствие. Фазовый поток (I) имеет интегральными инвариантами формы $\omega^2, \omega^4, \ldots, \omega^{2n}$.

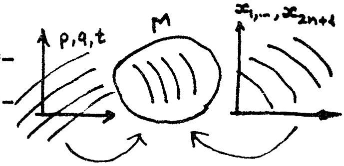
Последний из инвариантов есть фазовый объем, так что мы вновь доказали теорему Лиувилля.

ЛЕКЦИЯ 31.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ИНВАРИАНТЕ ПУАНКАРЕ-КАРТАНА.

а. Замены переменных в канонических уравнениях.

Из инвариантности связи формы $pdq - Hdt$ с ее линиями ротора вытекает способ писать уравнения движения в любой системе $2n+1$ координат в расширенном фазовом пространстве p, q, t.



Пусть $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ – координатные функции в некоторой карте расширенного фазового пространства p, q, t (рассматриваемого как многообразие M^{2n+1}).
Координаты p, q, t можно рассматривать как задающие другую карту M. Форму $\omega^1 = pdq - Hdt$ можно рассматривать как дифференциальную 1-форму на M. С этой формой инвариантным (не зависящим от карт) образом связано семейство линий на M – линий ротора. На карте p, q, t эти линии изображаются траекториями фазового потока

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

с функцией Гамильтона $H(p, q, t)$.
Пусть форма ω^1 в координатах $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ записывается в виде

$$pdq - Hdt = X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n + \ldots + X_{2n+1} dx_{2n+1}$$

ТЕОРЕМА. На карте x траектории (I) изображаются линиями ротора формы $\sum_{i=1}^{2n+1} X_i\,dx_i$.

Доказательство. Линии ротора форм $\sum X\,dx$ и $\mathbb{p}\,d\mathbb{q} - H\,dt$ суть изображения на двух разных картах линий ротора одной и той же формы на M, $\mathbb{p}\,d\mathbb{q} - H\,dt$. Но интегральные кривые (I) суть линии ротора $\mathbb{p}\,d\mathbb{q} - H\,dt$ (лекция 30). Значит их образы на карте x суть линии ротора формы $\sum X\,dx$, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n, T$ - локальная система координат в расширенном фазовом пространстве p, q, t, и $K(P, Q, T)$, $S(P, Q, T)$ - такие функции, что

$$\mathbb{p}\,d\mathbb{q} - H\,dt = \mathbb{P}\,d\mathbb{Q} - K\,dT + dS$$

(левая и правая части суть формы на расширенном фазовом пространстве).

Тогда траектории фазового потока (I) изображаются на карте $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, T$ интегральными кривыми канонических уравнений

$$\frac{d\mathbb{P}}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbb{Q}}, \qquad \frac{d\mathbb{Q}}{dT} = \frac{\partial K}{\partial \mathbb{P}} \tag{2}$$

Доказательство. По предыдущей теореме траектории (I) изображаются линиями ротора формы $\mathbb{P}\,d\mathbb{Q} - K\,dT + dS$. Но dS на линии ротора не влияет (так как $d\,dS = 0$). Поэтому изображения траекторий (I) суть линии ротора формы $\mathbb{P}\,d\mathbb{Q} - K\,dT$. Согласно лекции 30, линии ротора такой формы суть интегральные кривые канонических уравнений (2), что и требовалось доказать.

В частности, пусть $g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ -каноническое преобразование фазового пространства, переводящее точку с координатами $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ в точку с координатами $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$.

Функции $\mathbf{P}(\mathbf{p},\mathbf{q}), \mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ можно рассматривать как новые координаты в фазовом пространстве.

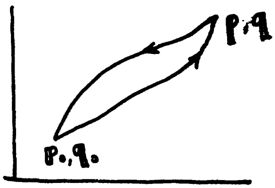
ТЕОРЕМА. В новых координатах $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ канонические уравнения (I) имеют канонический вид*)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} \qquad (3)$$

со старой функцией Гамильтона: $K(\mathbf{P},\mathbf{Q},t) = H(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$.

Доказательство. Рассмотрим I-форму $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - \mathbf{P}\,d\mathbf{Q}$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Для любой замкнутой кривой γ имеем



$$\oint_\gamma \mathbf{p}\,d\mathbf{q} - \mathbf{P}\,d\mathbf{Q} = \oint_\gamma \mathbf{p}\,d\mathbf{q} - \oint_{g\gamma} \mathbf{p}\,d\mathbf{q} = 0$$

---

*) В некоторых учебниках свойство сохранять канонический вид уравнений Гамильтона принято за определение канонических преобразований. В действительности это определение не эквивалентно общепринятому и приведенному выше. Например, не каноническое в нашем смысле преобразование $P = 2p$, $Q = q$ сохраняет Гамильтонов вид уравнений движения. Тем не менее, в учебнике Ландау и Лифшица (§ 45) "доказывается", что всякое преобразование, сохраняющее канонические уравнения, каноническое в нашем смысле.
Задача. Найдите ошибку на стр. 180 книги Ландау и Лифшица.

ввиду каноничности g. Поэтому $\int_{\mathbb{p}_0,\mathbb{q}_0}^{\mathbb{p}_1,\mathbb{q}_1} \mathbb{p}d\mathbb{q} - \mathbb{P}d\mathbb{Q} = S(\mathbb{p},\mathbb{q})$ не зависит от пути интегрирования, но лишь от конечной точки $(\mathbb{p}_1,\mathbb{q}_1)$ (при фиксированной начальной точке $(\mathbb{p}_0,\mathbb{q}_0)$). Итак, $dS = \mathbb{p}d\mathbb{q} - \mathbb{P}d\mathbb{Q}$. Следовательно, в расширенном фазовом пространстве

$$\mathbb{p}d\mathbb{q} - Hdt = \mathbb{P}d\mathbb{Q} - Hdt + dS$$

и применима предыдущая теорема. При этом (2) превращается в (3), что и требовалось доказать.

Задача. Пусть $g(t): \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ – каноническое преобразование фазового пространства, зависящее от параметра t, $g(t): \mathbb{p},\mathbb{q} \to \mathbb{P}(\mathbb{p},\mathbb{q},t), \mathbb{Q}(\mathbb{p},\mathbb{q},t)$. Докажите, что канонические уравнения (I) в переменных $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, t$ имеют канонически вид, с новой функцией Гамильтона

$$K(\mathbb{P},\mathbb{Q},t) = H(\mathbb{p},\mathbb{q},t) - \frac{\partial S}{\partial t}, \text{ где } S(\mathbb{p}_1,\mathbb{q}_1,t) = \int_{\mathbb{p}_0,\mathbb{q}_0}^{\mathbb{p}_1,\mathbb{q}_1} \mathbb{p}d\mathbb{q} - \mathbb{P}d\mathbb{Q}$$

Б. Понижение порядка с помощью интеграла энергии.

Пусть теперь функция Гамильтона $H(\mathbb{p},\mathbb{q})$ не зависит от времени. Тогда канонические уравнения (I) имеют первый интеграл: $H(\mathbb{p},\mathbb{q}) = const$. Оказывается, с помощью этого интеграла можно понизить размерность пространства $(2n+1)$ на 2 единицы, сведя задачу к интегрированию некоторой сиситемы канонических уравнений в $2n-1$ -мерном пространстве.

Предположим, что (в некоторой области) уравнение

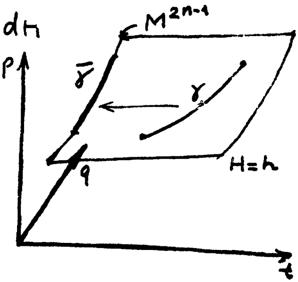
$H(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n)=h$ можно разрешить относительно p_1:

$p_1=K(\mathbb{P},\mathbb{Q},T;h)$, где $\mathbb{P}=p_2,\dots,p_n$; $\mathbb{Q}=q_2,\dots,q_n$

$T=-q_1$.

Тогда находим

$$\mathbb{p}d\mathbb{q}-Hdt=\mathbb{P}d\mathbb{Q}-KdT-d(H\cdot t)+t\,dH$$



Пусть теперь γ –фазовая траектория канонических уравнений (1), лежащая на $2n$ –мерной поверхности $H(\mathbb{p},\mathbb{q})=h$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Тогда γ есть линия ротора формы $\mathbb{p}d\mathbb{q}-Hdt$.

Спроектируем расширенное фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n+1}=\{(\mathbb{p},\mathbb{q},t)\}$ на фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}=\{(\mathbb{p},\mathbb{q})\}$. Поверхность $H=h$ спроектируется в $2n-1$ –мерное подмногообразие M^{2n-1}: $H(\mathbb{p},\mathbb{q})=h$ в $\mathbb{R}^{2n}$, а кривая γ в кривую $\bar{\gamma}$, лежащую на этом подмногообразии. Величины $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, T образуют локальные координаты в M^{2n-1} .

<u>Задача</u>. Докажите, что <u>кривая $\bar{\gamma}$ является линией ротора формы</u> $\mathbb{p}d\mathbb{q}=\mathbb{P}d\mathbb{Q}-KdT$ <u>на</u> M^{2n-1} .

<u>Указание</u>. $d(H\cdot t)$ не влияет на линии ротора, а dH на M^{2n-1} есть 0.

Но линии ротора формы $\mathbb{P}d\mathbb{Q}-KdT$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона (2). Итак, доказана <u>Теорема</u>: <u>Фазовые траектории уравнений (I) на поверхности M^{2n-1} , $H=h$, удовлетворяют каноническим уравнениям</u>

$$\frac{dq_i}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial q_i}\qquad (i=2,\dots,n)$$

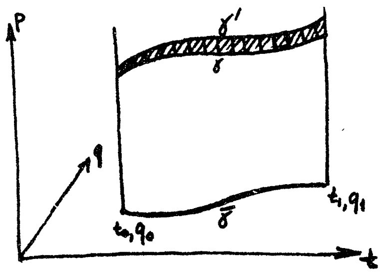
где функция $K(p_2,\dots,p_n,q_2,\dots,q_n;-q_1,h)$ определяется из уравнения $H(K,p_2,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n)=h$.

В. Принцип наименьшего действия в фазовом пространстве.

Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве $\mathbf{p},\mathbf{q},t$ интегральную кривую γ канонических уравнений (I), соединяющую точки $\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,t_0$ и $\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1,t_1$.

ТЕОРЕМА. Интеграл $\int \mathbf{p}\,d\mathbf{q}-H\,dt$ имеет γ экстремалью относительно вариаций γ, при которых концы кривой остаются на n-мерных подпространствах $(t=t_0,\ \mathbf{q}=\mathbf{q}_0)$ и $(t=t_1,\ \mathbf{q}=\mathbf{q}_1)$.

Доказательство.



Кривая γ -линия ротора формы $\mathbf{p}\,d\mathbf{q}-H\,dt$. Поэтому интеграл $\mathbf{p}\,d\mathbf{q}-H\,dt$ по "бесконечномалому параллелограмму, проходящему через направление ротора" равен нулю.

Иными словами, приращение $\int_{\gamma'} \mathbf{p}\,d\mathbf{q}-H\,dt-\int_{\gamma} \mathbf{p}\,d\mathbf{q}-H\,dt$ малая высшего порядка по сравнению с отличием кривых γ' и γ, что и требовалось доказать.

Если это рассуждение покажется недостаточно строгим, его можно заменить выкладкой:

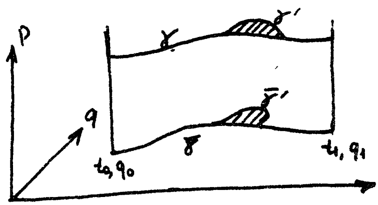
$$\delta\int_{\gamma}(\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}}-H)\,dt=\int_{\gamma}\left(\dot{\mathbf{q}}\,\delta\mathbf{p}+\mathbf{p}\,\delta\dot{\mathbf{q}}-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\delta\mathbf{p}-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\delta\mathbf{q}\right)=\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\Big|_0^1+\int_{\gamma}\left[\left(\dot{\mathbf{q}}-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\mathbf{p}-\right.$$

$$\left.-\left(\dot{\mathbf{p}}+\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q}\right]dt$$

Мы видим, что интегральные кривые уравнений Гамильтона - единственные экстремали интеграла $\int p\,dq - H\,dt$ в классе кривых γ, концы которых лежат на n-мерных подпространствах $t=t_0$, $q=q_0$ и $t=t_1$, $q=q_1$ расширенного фазового пространства. Теорема доказана.

<u>Замечание</u>. Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона есть частный случай рассмотренного выше принципа. Действительно, вдоль экстремали имеем

$$\int_{t_0,q_0}^{t_1,q_1} p\,dq - H\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(p\dot{q} - H)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$$



(ибо Лагранжиан L и Гамильтониан H - преобразования Лежандра друг друга).

Далее, пусть $\bar{\gamma}$ есть проекция экстремали γ на плоскость q,t. Любой близкой кривой $\bar{\gamma}'$, соединяющей те же точки (t_0,q_0), (t_1,q_1) на плоскости (q,t) сопоставим кривую γ' в фазовом p,q,t пространстве, полагая $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Тогда вдоль γ' также $\int_{\gamma'} p\,dq - H\,dt = \int_{\bar{\gamma}'} L\,dt$. Но по доказанной теореме $\delta\int_\gamma p\,dq - H\,dt = 0$ для любых вариаций кривой γ (при граничных условиях $t=t_0$, $q=q_0$ и $t=t_1$, $q=q_1$). В частности, это верно для вариаций специального вида, переводящих γ в γ'. Значит $\bar{\gamma}$ есть экстремаль $\int L\,dt$, что и требовалось доказать.

В доказанной теореме к сравнению с γ допускается значительно более широкий класс кривых γ', чем в принципе

Гамильтона: на связь $\mathbb{p}$ с $\dot{\mathbb{q}}$ не накладывается никаких ограничений. Может показаться удивительным, что оба принципа, тем не менее, эквивалентны: из экстремальности в более узком классе вариаций $\left(\mathbb{p}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbb{q}}}\right)$ следует экстремальность при любых вариациях. Объяснение состоит в том, что при фиксированном $\dot{\mathbb{q}}$ величина $\mathbb{p}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbb{q}}}$ экстремизирует $\mathbb{p}\dot{\mathbb{q}}-H$ (см. лекцию о преобразовании Лежандра).

Г. Принцип наименьшего действия в форме Мопертюи-Эйлера-Лагранжа-Якоби.

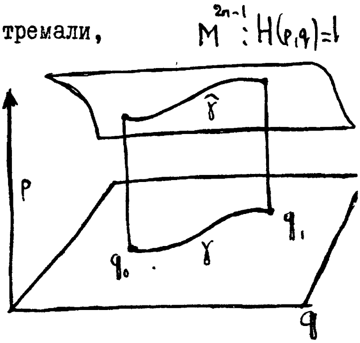
Пусть теперь функция Гамильтона $H(\mathbb{p},\mathbb{q})$ не зависит от времени. Тогда $H(\mathbb{p},\mathbb{q})$ есть первый интеграл уравнений Гамильтона (I). Спроектируем поверхность $H(\mathbb{p},\mathbb{q})=h$ из расширенного фазового пространства $(\mathbb{p},\mathbb{q},t)$ в пространство $(\mathbb{p},\mathbb{q})$. Получится $2n-1$ -мерная поверхность $H(\mathbb{p},\mathbb{q})=h$ в $\mathbb{R}^{2n}$, которую мы уже рассматривали в пункте Б и которую мы обозначили M^{2n-1}.

Фазовые траектории канонических уравнений (I), начинающиеся на поверхности M^{2n-1}, целиком лежат на поверхности M^{2n-1}. Они являются линиями ротора формы $\mathbb{p}d\mathbb{q}=\mathbb{P}d\mathbb{Q}-KdT$ (в обозначениях пункта Б) на M^{2n-1}.

Согласно теореме пункта В, кривые (I) на M^{2n-1} - экстремали вариационного принципа, соответствующего этой форме. Итак, доказана

ТЕОРЕМА. Если функция Гамильтона $H=H(\mathbb{p},\mathbb{q})$ не зависит от времени, то фазовые траектории канонических уравнений (I), лежащие на поверхности M^{2n-1} : $H(p,q)=h$, являются экстремалями интеграла $\int p\,dq$ в классе кривых, лежащих на M^{2n-1} и соединяющих подпространства $q=q_0$ и $q=q_1$.

Рассмотрия теперь проекцию экстремали, лежащей на поверхности M^{2n-1} : $H(p,q)=h$ на q -пространство. Эта кривая соединяет точки q_0 и q_1.



Пусть, далее, γ -другая кривая, соединяющая точки q_0 и q_1. Эта кривая γ является проекцией некоторой кривой $\hat{\gamma}$ на поверхности M^{2n-1}. А именно, выберем на γ параметр $a \le \tau \le b$, $\gamma(a)=q_0$, $\gamma(b)=q_1$. Тогда в каждой точке q кривой γ определен вектор скорости $\dot{q}=\frac{d}{d\tau}\gamma(\tau)$, и соответствующий импульс $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Если параметр τ подобран так, что $H(p,q)=h$, то мы получаем, кривую $\hat{\gamma}$: $q=\gamma(\tau)$, $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ на поверхности M^{2n-1}. Применяя предыдущую теорему к кривым $\hat{\gamma}$ на M^{2n-1}, получаем:

Следствие. Среди всех кривых $q=\gamma(\tau)$, соединяющих две точки q_0 и q_1 на плоскости q и параметризованных так, что функция Гамильтона имеет фиксированное значение $H(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, q)=h$, траекторией уравнении динамики (I) является экстремаль интеграла "укороченного действия"

$$\int_\gamma p\,dq = \int_\gamma p\dot{q}\,d\tau = \int_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\,d\tau$$

2^x-1427

Это и есть принцип наименьшего действия Мопертюи-Эйлера-Лагранжа. [ж)] Важно отметить, что отрезок , параметризующий кривую . не фиксирован и может быть разным у сравниваемых кривых. Зато одинаковой должна быть энергия (функция Гамильтона), Заметим также, что принцип определяет форму траектории, но не время: для определения времени нужно воспользоваться постоянной энергией.

Особенно простую форму доказанный принцип принимает в случае, когда система представляет движение по инерции по гладкому многообразию.

<u>ТЕОРЕМА</u>. <u>Материальная точка, вынужденная оставаться на гладком римановом многообразии, движется по геодезической линии (т.е. по экстремали длины $ds=\sqrt{\sum a_{ij}\,dq_i\,dq_j}$).</u>

<u>Доказательство</u>. Действительно, в нашем случае $H=L=T=\frac{1}{2}\frac{ds^2}{d\tau^2}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}=2T=\frac{ds^2}{d\tau^2}$. Следовательно, чтобы обеспечить фиксированное значение $H=h$, , параметр τ надо выбирать пропорциональным длине: $d\tau=\frac{ds}{\sqrt{2h}}$. Интеграл укороченного действия тогда равен

$$\int\limits_{\gamma}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\,d\tau=\int\limits_{\gamma}\sqrt{2h}\,ds=\sqrt{2h}\int\limits_{\gamma}ds$$

ж) "Почти во всех учебниках, даже и в лучших, этот принцип представлен так, что его нельзя понять". (К.Якоби, Лекции по динамике, 1884г.).

<u>Задача</u>. Укажите ошибку в "доказательстве" принципа Мопертюи в § 44 книги Ландау и Лифшица.

поэтому экстремали суть геодезические нашего многообразия, что и требовалось доказать.

В случае, когда имеется также потенциальная энергия, траектории уравнений динамики также являются геодезическими некоторой римановой метрики.

Пусть ds^2 -риманова метрика на конфигурационном пространстве, задающая кинетическую энергию (так что $T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$) Пусть h -постоянная.

ТЕОРЕМА. Зададим в области конфигурационного пространства, где $U(q)<h$, риманову метрику формулой

$$d\rho=\sqrt{h-U(q)}\,ds$$

Тогда траектории системы с кинетической энергией $T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ потенциальной энергией $U(q)$ и полной энергией h будут геодезическими линиями метрики $d\rho$.

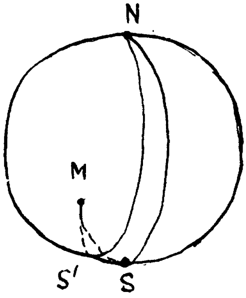
Доказательство. Действительно, в нашем случае $L=T-U$, $H=T+U$, $\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q=2T=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2(h-U)$. Следовательно, чтобы обеспечить фиксированное значение $H=h$, параметр τ надо выбрать пропорциональным длине: $d\tau=$ $=\frac{ds}{\sqrt{2(h-U)}}$. Интеграл укороченного действия тогда будет равен

$$\int\limits_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q\, d\tau=\int\limits_\gamma \sqrt{2(h-U)}\,ds=\sqrt{2}\int\limits_\gamma d\rho$$

по принципу Мопертюи-Эйлера-Якоби траектории суть геодезические метрики $d\rho$, что и требовалось доказать.

Замечание I. Метрика $d\rho$ получается из ds "растяжением", зависящим от точки q, но не зависящим от направления. Поэтому углы в метрике $d\rho$ совпадают с углами в метрике ds. На границе области $U \leq h$ метрика $d\rho$ имеет особенность: чем ближе мы подходим к границе, тем меньше становится ρ -длина. В частности, длина любой кривой, лежащей на самой границе $(U = h)$ равна 0.

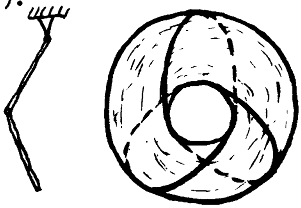
Замечание 2. Если начальная и конечная точки геодезической γ достаточно близки, то экстремум длины есть минимум. Это оправдывает название "принцип наименьшего действия". Что в общем случае экстремум действия не обязательно минимум видно из рассмотрения геодезических на единичной сфере. Каждая дуга меридиана является геодезической, но минимальны лишь те из них, которые короче π: дуга $NS'M$ короче дуги меридиана NSM.



Замечание 3. Если h больше максимума U на конфигурационном пространстве, то метрика $d\rho$ не имеет особенностей. Поэтому мы можем применить топологические теоремы о геодезических на римановых многообразиях к изучению механических задач.

Так, например, рассмотрим тор T^2 с некоторой римановой метрикой. Среди всех замкнутых кривых на T^2, делающих m оборотов по параллели и n по меридиану существует кривая кратчайшей длины. Эта **кривая - замкнутая** геодезическая (доказательство см. в книгах по вариационному исчислению в целом или "теории Морса").

С другой стороны, тор T^2 является конфигурационным пространством плоского двойного маятника. Отсюда вытекает



$m=2$, $n=3$

ТЕОРЕМА. Для любых целых m, n существует периодическое движение двойного маятника, при котором одно звено делает m оборотов за время, за которое второе звено делает n оборотов.

Более того, такое периодическое движение существует при любом достаточно большом значении постоянной энергии h (h должно быть больше потенциальной энергии в верхнем положении).

В качестве еще одного примера рассмотрим твердое тело, закрепленное в неподвижной точке и находящееся в произвольном потенциальном поле. Конфигурационное пространство $(SO(3))$ неодносвязно: на нем существуют нестягиваемые кривые. Из предыдущих рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА. Каково бы ни было потенциальное силовое поле, существует по крайней мере одно периодическое движение тела. Более того, существуют такие периодические движения, для которых энергия h сколь угодно велика.

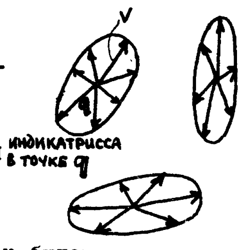
ЛЕКЦИЯ 32

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

Основные понятия Гамильтоновой механики (импульсы p, функция Гамильтона H, форма $pdq - Hdt$, уравнение Гамильтона-Якоби, о котором будет идти речь ниже) возникли при перенесении на общие вариационные принципы (и, в частности, на принцип стационарного действия Гамильтона, $\delta \int L dt = 0$ некоторых весьма простых и естественных понятий геометрической оптики, управляемой частным вариационным принципом - принципом Ферма.

Рассмотрим коротко[ж)] эти основные понятия геометрической оптики. Согласно экстремальному принципу Ферма, свет распространяется из точки q_0 в точку q_1 за кратчайшее время. При этом скорость света может зависеть как от точки q ("неоднородная среда"), так и от направления луча ("неизотропная среда" - кристаллы, например).

Свойства среды можно описать, задав в касательном пространстве в каждой точке q поверхность ("индикатриссу"). Для этого отложим по каждому направлению вектор скорости распространения света в данной точке по данному направлению.



Пусть теперь $t>0$. Рассмотрим множество всех точек q, до которых свет из данной точки q_0 может дойти за время меньшее или равное t. Граница этого

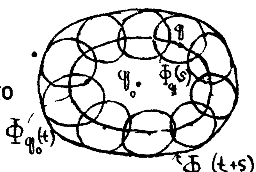
ж) Мы не будем здесь гнаться за строгостью и будем считать, что все определители отличны от 0, и т.п. От полуэвристических рассуждений этого пункта доказательства дальнейших теорем не зависят.

множества, $\Phi_{q_0}(t)$ называется "волновым фронтом" точки q_0 через время t и состоит*) из точек, до которых свет может дойти за время t и не может дойти быстрее.

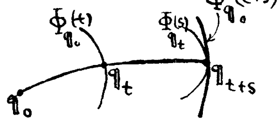
Между волновыми фронтами, соответствующими разным значениям t, имеется замечательное соотношение, открытое Гюйгенсом.

ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА.

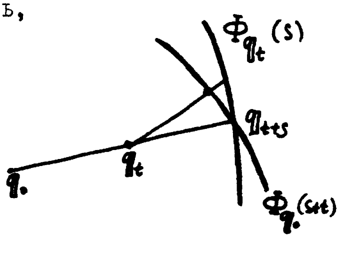
Рассмотрим волновой фронт точки q_0 через время t, $\Phi_{q_0}(t)$. Построим для каждой точки q этого фронта волновой фронт через время s, $\Phi_q(s)$. Тогда волновой фронт точки q_0 через время $s+t$, $\Phi_{q_0}(s+t)$, будет огибать построенные фронты $\Phi_q(s)$, $q \in \Phi_{q_0}(t)$.



В самом деле, пусть $q_{t+s} \in \Phi_{q_0}(t+s)$. Тогда существует путь из q_0 в q_{t+s}, по которому время распространения света равно $s+t$, и нет более короткого.



Рассмотрим точку q_t на этом пути, до которой свет идет время t. Никакого более короткого пути от q_0 до q_t не может быть, иначе путь $q_0 q_{t+s}$ не был бы кратчайшим. Поэтому точка q_t лежит на фронте $\Phi_{q_0}(t)$. Точно так же, путь $q_t q_{t+s}$ свет проходит за время s и из точки q_t в q_{t+s} нет более короткого пути. Поэтому точка q_{t+s} лежит на фронте точки q_t за время s, $\Phi_{q_t}(s)$. Покажем, что фронты $\Phi_{q_t}(s)$ и $\Phi_{q_0}(t+s)$ в точке q_{t+s} касаются. Действительно, если бы они пересекались, в некоторые точки $\Phi_{q_0}(t+s)$ можно



было бы добраться из q_t за время, меньшее s, а значит из q_0 за время, меньше $s+t$. Это противоречит определению $\Phi_{q_0}(t+s)$; итак, фронты $\Phi_{q_t}(s)$ и $\Phi_{q_0}(t+s)$ касаются в точке q_{t+s}, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема и называется принципом Гюйгенса. Разумеется, точку q_0 можно было бы заменить кривой, поверхностью, или вообще замкнутым множеством, трехмерное пространство q – любым гладким многообразием, а распространение света – распространением любого возмущения, передающегося "локально".

Принцип Гюйгенса приводит к двум описаниям процесса распространения. Во-первых, мы можем следить за лучами, т.е. кратчайшими путями распространения света. В этом случае локальный характер распространения задается вектором скорости $\dot{q}$. Если направление луча известно, то величина вектора скорости задается свойством среды (индикатриссой).

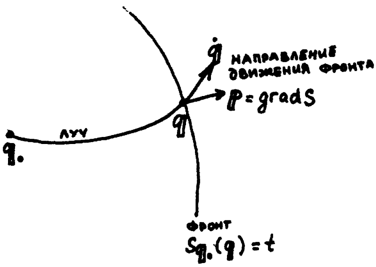
С другой стороны, мы можем следить за волновыми фронтами.

Предположим, что в пространстве q задана риманова метрика. Тогда можно говорить о скорости движения волнового фронта. Рассмотрим, например, распространение света в среде, заполняющей обычное евклидово пространство. Тогда движение волнового фронта можно характеризовать перпендикулярным фронту вектором p, который строится следующим образом.

Для каждой точки q_0 определим функцию $S_{q_0}(q)$ как "оптическую длину пути от q_0 до q", т.е. наименьшее время распространения света от q_0 до q.

Множество уровня

$$\{q : S_{q_0}(q) = t\}$$



есть не что иное, как волновой фронт $\Phi_{q_0}(t)$.
Градиент функции S (в смысле упомянутой выше метрики) перпендикулярен волновому фронту, и характеризует движение волнового фронта. При этом чем больше градиент, тем медленнее движется фронт.
Поэтому Гамильтон назвал вектор

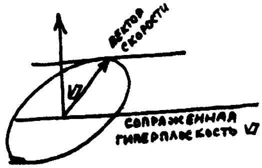
$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

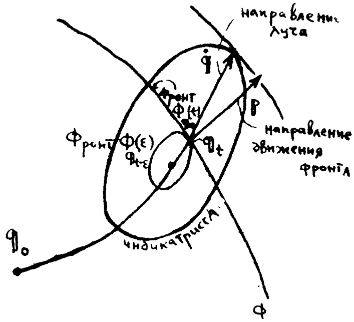
вектором нормальной медлительности фронта.

Направление луча, $\dot{q}$, и направление движения фронта, p , в неизотропной среде не совпадают. Однако они связаны друг с другом простым соотношением, легко выводящимся из принципа Гюйгенса. Напомню, что свойства среды в каждой точке характеризуются поверхностью векторов скорости света - индикатриссой.

Определение. Направление гиперплоскости, касающейся индикатриссы в точке v , называется сопряженным к направлению v .

ТЕОРЕМА. Направление волнового фронта $\Phi_{q_0}(t)$ в точке q_t сопряжено направлению луча $\dot{q}$.





Доказательство. Рассмотрим точки q_τ луча $q_0 q$, $0 \leq \tau < t$. Пусть ε очень мало. Тогда фронт $\Phi_{q_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ отличается от индикатриссы точки q_t, сжатой в ε раз, лишь малыми порядка $O(\varepsilon^2)$. По принципу Гюйгенса, этот фронт $\Phi_{q_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ касается фронта $\Phi_{q_0}(t)$ в точке q_t. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем сформулированную теорему.

При изменении вспомогательной метрики, с помощью которой мы определили вектор p, будет меняться понятие скорости движения фронта, а значит и величина и направление вектора p. Однако, дифференциальная I-форма

$$p\,dq = ds$$

определена не зависящим от вспомогательной метрики образом. На гиперплоскости, сопряженной вектору скорости луча, эта форма равна 0, а ее значение на векторе скорости равно I.ж) Можно сказать, что форма $p\,dq$ инвариантно связана с вариационным принципом Ферма.

Вернемся теперь к механике. Здесь траектории движения также являются траекториями вариационного принципа, и можно

ж) Таким образом, векторы p, соответствующие всевозможным фронтам, проходящим через данную точку, не произвольны, но подчинены одному условию: допустимые значения p заполняют в пространстве p гиперповерхность, двойственную индикатриссе скоростей.

строить механику как геометрическую оптику многомерного пространства. Именно так и поступил Гамильтон; мы не будем проводить это построение во всех деталях, а только перечислим те оптические понятия, которые привели Гамильтона к основным механическим понятиям.

Оптика.	Механика
Принцип Ферма	Принцип Гамильтона $\delta\int L\,dt$
Лучи	Траектории $q(t)$
Индикатрисса	Лагранжиан L
Нормальная медлительность фронта p	Импульс p
Выражение p через скорость луча $\dot q$	Преобразование Лежандра $\dot q \to p$
I-форма $p\,dq$	I-форма $p\,dq - H\,dt$

Неиспользованными остались оптическая длина пути $S_{q_0}(q)$ и принцип Гюйгенса. Их механические аналоги – функция действия и уравнение Гамильтона-Якоби, к которым мы теперь и перейдем.

Определение. Функцией действия $S(q,t)$ называется интеграл

$$S_{q_0,t_0}(q,t) = \int_\gamma L\,dt$$

вдоль экстремали γ, соединяющей точки q_0,t_0 и q,t.

Чтобы это определение было корректным, нужно принять некоторые предосторожности: нужно потребовать, чтобы экстремали, выходящие из точки q_0,t_0, более не пересекались, а образовывали т.н. "центральное поле экстремалей".

Точнее, сопоставим каждой паре $(\dot{q}_0, t)$ точку (q, t) - конец экстремали с начальными условиями $q(0) = q_0$, $\frac{d}{d\tau}\big|_{\tau=0} q(\tau) = \dot{q}_0$. Говорят, что экстремаль γ включена в центральное поле, если отображение $\dot{q}_0, t \to q, t$ невырождено (в точке, соответствующей рассматриваемой экстремали γ и, следовательно, в некоторой ее окрестности).

Можно доказать, что при достаточно малом $|t - t_0|$ экстремаль γ включается в центральное поле.*)

Рассмотрим теперь достаточно малую окрестность конечной точки t, q нашей экстремали. Каждая точка этой окрестности соединена с t_0, q_0 единственной экстремалью рассматриваемого центрального поля. Эта экстремаль дифференцируемо зависит от конечной точки t, q . Поэтому в указанной окрестности корректно определена функция действия

$$S_{q_0, t_0}(q, t) = \int_\gamma L\, dt$$

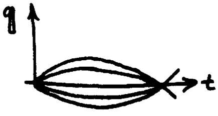
В геометрической оптике мы рассматривали дифференциал оптической длины пути. Естественно и здесь рассмотреть дифференциал функции действия.

<u>ТЕОРЕМА</u>. <u>Дифференциал функции действия (при фиксированной начальной точке) равен</u>

$$dS = p\,dq - H\,dt$$

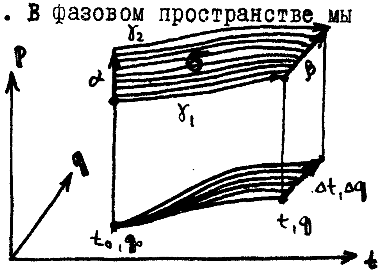
<u>где</u> $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, $H = p\dot{q} - L$ <u>определяются по конечной скорости</u> $\dot{q}$ <u>траектории</u> γ .

*) <u>Задача</u>. Покажите, что при больших $t - t_0$ это уже не так.
<u>Указание</u>:



$$\ddot{q} = -q$$

Доказательство. Поднимем каждую экстремаль из q, t пространства в расширенное фазовое пространство p, q, t, полагая $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, т.е. заменяя экстремаль фазовой траекторией. Мы получим тогда в фазовом пространстве $n+1$ -мерное многообразие, составленное из фазовых траекторий, т.е. линий ротора формы $p\,dq - H\,dt$. Дадим теперь конечной точке (t, q) приращение Δt, Δq, и рассмотрим семейство экстремалей, соединяющих t_0, q_0 с точками отрезка $(t+\theta\Delta t, q+\theta\Delta q)$ $0 \le \theta \le 1$. В фазовом пространстве мы получим составленный из линий ротора формы $p\,dq - H\,dt$ прямоугольник σ, граница которого



$$\partial\sigma = \gamma_1 - \gamma_2 + \beta - \alpha$$

состоит из двух фазовых траекторий γ_1 и γ_2, отрезка кривой α, лежащей в пространстве $t = t_0$, $q = q_0$, и отрезка кривой β, проектирующегося в отрезок Δt, Δq. Так как σ состоит из линий ротора формы $p\,dq - H\,dt$, имеем

$$0 = \iint_{\sigma} d(p\,dq - H\,dt) = \int_{\partial\sigma} p\,dq - H\,dt = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\beta} - \int_{\alpha} p\,dq - H\,dt$$

Но на отрезке α имеем $dq = 0$, $dt = 0$. На фазовых траекториях γ_1 и γ_2 $p\,dq - H\,dt = L\,dt$ (см. лекцию 31). Итак, разность $\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1} p\,dq - H\,dt$

равна приращению функции действия и мы **находим**

$$\int_{\beta} p\,dq - H\,dt = S(q+\Delta q, t+\Delta t) - S(q,t)$$

Если теперь $\Delta t \to 0$, $\Delta q \to 0$, то

$$\int_{\beta} p\,dq - H\,dt = p\Delta q - H\Delta t + o(\Delta t, \Delta q)$$

что и доказывает теорему.

Мы видим, что форма $p\,dq - H\,dt$, прежде введенная нами искусственно, сама собой возникает при проведении оптико-механической аналогии из рассмотрения функции действия, соответствующей оптической длине пути.

Вспомним теперь, что "вектор нормальной медлительности p " не может быть совсем <u>произвольным</u>: он подчиняется одному условию $p\dot{q} = 1$, вытекающему из принципа Гюйгенса (стр. 5). Аналогичное условие накладывается и на градиент функции действия S .

<u>ТЕОРЕМА</u>. <u>Функция действия удовлетворяет уравнению</u>

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0 \qquad (I)$$

Это нелинейное уравнение I порядка в частных производных называется <u>уравнением Гамильтона-Якоби</u>.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что по предыдущей теореме

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(\mathbb{p}, \mathbb{q}, t) \quad \text{и} \quad \mathbb{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbb{q}}$$

Установленную связь между траекториями механической системы ("лучами") и уравнением в частных производных ("волновыми фронтами") можно использовать в двух направлениях.

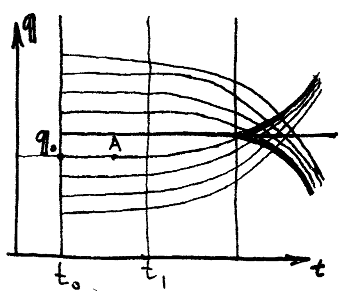
Во-первых, некоторые решения уравнения (I) можно использовать для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений динамики. В этом состоит метод Якоби интегрирования канонических уравнений Гамильтона, изложенный в следующей лекции, Во-вторых, связь лучевой и волновой точек зрения позволяет свести интегрирование уравнения в частных производных (I) к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона.

Остановимся на этом несколько подробнее. Поставим для уравнения **Гамильтона-Якоби** (I) задачу Коши

$$S(\mathbb{q}, t_0) = S_0(\mathbb{q}) \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbb{q}}, \mathbb{q}, t\right) = 0 \qquad (2)$$

Чтобы построить решение этой задачи, рассмотрим систему канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbb{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbb{q}} \ , \ \dot{\mathbb{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbb{p}}$$



Рассмотрим начальные условия

$$\mathbb{q}(t_0) = \mathbb{q}_0 \ , \quad \mathbb{p}(t_0) = \left.\frac{\partial S_0}{\partial \mathbb{q}}\right|_{\mathbb{q}_0}$$

Соответствующее этим начальным условиям решение изображается в (q,t) пространстве кривой $q = q(t)$ – экстремалью принципа $\delta\int L\,dt = 0$ (где лагранжиан $L(q,\dot q,t)$ есть преобразование Лежандра по p от функции Гамильтона $H(p,q,t)$). Эта экстремаль называется характеристикой уравнений (2), выходящей из точки q_0.

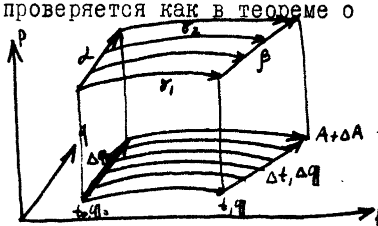
Если значение t_1 достаточно близко к t_0, то характеристики, выходящие из разных точек q_0 не пересекаются при $t_0 \le t \le t_1$, $|q| < R$. Более того, значения q_0 и t можно принять за координаты точки A в области $|q| < R$, $t_0 < t < t_1$.

Построим теперь "функцию действия с начальным условием S_0"

$$S(A) = S(q_0) + \int_{t_0,q_0}^{A} L(q,\dot q,t)\,dt \qquad (3)$$

(интегрирование вдоль характеристики, ведущей в А).

ТЕОРЕМА. Функция (3) есть решение нашей задачи (2). Действительно, начальное условие очевидно выполнено. Выполнение уравнения Гамильтона-Якоби проверяется как в теореме о дифференциале функции действия:



По лемме Стокса

$$\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\beta} - \int_{\alpha} p\,dq - H\,dt = 0$$

но на α $dt = 0$, $p = \frac{\partial S_0}{\partial q}$,

поэтому $\int_\alpha p\,dq - H\,dt = \int_\alpha p\,dq = \int_\alpha \frac{\partial S_0}{\partial q}\,dq = S_0(q_0+\Delta q) - S_0(q_0)$

Далее, $\gamma_{1,2}$ – фазовые траектории, поэтому

$$\int_{\gamma_{1,2}} \mathbb{p}d\mathbb{q} - H\,dt = \int_{\gamma_{1,2}} L\,dt$$

итак,

$$\int_{\beta} \mathbb{p}d\mathbb{q} - H\,dt = \left(S_0(\mathbb{q}_0 + \Delta \mathbb{q}_0) + \int_{\gamma_2} L\,dt\right) - \left(S_0(\mathbb{q}_0) + \int_{\gamma_1} L\,dt\right) = S(A+\Delta A) - S(A$$

при $\Delta t \to 0$, получаем $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$, $\frac{\partial S}{\partial \mathbb{q}} = \mathbb{p}$, что и доказывает теорему.

Задача. Дрказать единственность решения задачи (2).

Замечание. Более общее нелинейное уравнение первого порядка

$$\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}, x\right) = 0$$

принимает вид (I), если разрешить его относительно одной из частных производных $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Самое общее нелинейное уравнение первого порядка в частных производных

$$\Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, x\right) = 0$$

сводится к предыдущему формальной постановкой

$$v = u x_0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_0} = u$$

Итак, приведенная теорема сводит решение задачи Коши для любого дифференциального уравнения в частных производных первого порядка к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона для характеристик.

ЛЕКЦИЯ 33

МЕТОД ЯКОБИ - ГАМИЛЬТОНА

Идея этого метода состоит в следующем. Мы уже знаем (лекция 31), что при канонической замене координат сохраняется канонический вид уравнений движения, а также функция Гамильтона.

Следовательно, если нам удастся найти канонические преобразование, приводящее функцию Гамильтона к такому виду, что канонические уравнения удастся проинтегрировать, то тем самым мы сумеем проинтегрировать и исходные канонические уравнения. Оказывается, задача построения такого канонического преобразования сводится к отысканию достаточно большого числа решений уравнения Гамильтона-Якоби в частных производных. Этому уравнению должна удовлетворять производящая функция искомого канонического преобразования.

Переходя к аппарату производящих функций, замечу, что он удручающе неинвариантен, и существенно использует координатную структуру в фазовом пространстве p, q. В соответствии с этим приходится пользоваться аппаратом частных производных, а это такой объект, в самом обозначении которого уже кроется двусмысленность.*)

---

*) Следует ясно понять, что величина $\frac{\partial u}{\partial x}$ на плоскости (x,y) зависит не только от того, какая функция принята за x, но и от того, какая функция принята за y: в новых переменных (x,z) значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ будет уже другим. Следовало бы писать

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=const}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=const}$$

Пусть $2n$ функций $P(p,q)$, $Q(p,q)$ от $2n$ переменных p, q задают каноническое преобразование $g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. В лекции 3I, а мы доказали, что I-форма $pdq - PdQ$ есть полный дифференциал:

$$pdq - PdQ = dS(p,q) \qquad \text{(I)}$$

Задача. Докажите, что и обратно, если эта форма – полный дифференциал, то преобразование – каноническое.

Предположим теперь, что в окрестности некоторой точки p_0, q_0 за независимые координаты можно принять Q, q. Иными словами, предположим, что отличен от 0 якобиан

$$\frac{\partial(Q,q)}{\partial(p,q)} = \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$$

Такие канонические преобразования называют свободными. Тогда, в частности, функцию S можно выразить через эти координаты:

$$S(p,q) = S_1(Q,q)$$

Определение. Функция $S_1(Q,q)$ называется производящей функцией нашего канонического преобразования $g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$.

Подчеркнем, что S_1 не есть функция на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$: эта функция задана в области прямого произведения $\mathbb{R}^n_q \times \mathbb{R}^n_Q$ некоторых двух n-мерных координатных пространств, точки которых обозначаются через q и Q.

Из (I) следует, что "частные производные" S_1 суть

$$\frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q} = p \quad , \quad \frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial Q} = -P \qquad (2)$$

Оказывается и обратно, всякая функция S_1, задает некоторое каноническое преобразование g по формулам (2).

ТЕОРЕМА. Пусть $S_1(q,Q)$ – функция, заданная в окрестности некоторой точки q_0, Q_0 прямого произведения двух n -мерных координатных евклидовых пространств. Если $\left.\frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial Q}\right|_{q_0,Q_0} \neq 0$, то функция S_1 является производящей функцией некоторого свободного канонического преобразования.

Доказательство. Рассмотрим уравнение относительно координат Q

$$\frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q} = p$$

По теореме о неявной функции это уравнение разрешимо, и определяет в окрестности точки $\left(q_0, p_0 = \left.\frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q}\right|_{Q_0,q_0}\right)$ функцию $Q(p,q)$ (причем $Q(p_0,q_0) = Q_0$). Действительно, нужный определитель здесь как раз $\left.\frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}\right|_{q_0,Q_0}$, а он по условию отличен от 0.

Рассмотрим теперь функцию

$$P_1(Q,q) = -\frac{\partial}{\partial Q} S_1(Q,q)$$

и положим

$$P(p,q) = P_1(Q(p,q),q)$$

Тогда отображение $g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ переводящее точку p,q в точку $P(p,q)$, $Q(p,q)$ будет каноническим с производящей функцией S_1 ибо по построению $p\,dq - P\,dQ = \frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q}dq + \frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial Q}dQ$.

Оно свободно, так как $\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial q\,\partial Q}\right)^{-1} \neq 0$. Теорема доказана.

Преобразование $g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ задается, вообще, $2n$ функциями от $2n$ переменных. Мы видим, что каноническое преобразование задается всего одной функцией $2n$ переменных – своей производящей функцией. Легко сообразить, какую выгоду дает применение производящих функций во всех вычислениях, связанных с каноническими преобразованиями. Эта выгода тем больше, чем больше число переменных $2n$.

Заметим теперь, что канонические уравнения, в которых функция Гамильтона H зависит от одних лишь переменных Q, легко интегрируются. Действительно, если $H = K(Q)$, то канонические уравнения имеют вид

$$\dot{Q} = 0 \quad , \quad \dot{P} = \frac{\partial K}{\partial Q} \qquad (3)$$

Откуда непосредственно

$$Q(t) = Q(0), \quad P(t) = P(0) + t\,\frac{\partial K}{\partial Q}\Big|_{Q(0)}.$$

Будем теперь искать каноническое преобразование, приводящее функцию Гамильтона $H(p,q)$ к виду $K(Q)$. С этой целью будем искать <u>производящую функцию</u> такого преобразования $S(Q,q)$. Мы получаем из (2) условие

$$H\left(\frac{\partial S(Q,q)}{\partial q}, q, t\right) = K(Q) \tag{4}$$

(где <u>после</u> дифференцирования вместо q следует подставить $q(P,Q)$). Заметим, что при фиксированном Q уравнение (4) имеет вид уравнения Гамильтона-Якоби.

<u>ТЕОРЕМА ЯКОБИ</u>. <u>Если найдено решение $S(Q,q)$ уравнения Гамильтона-Якоби (4), зависящее от n параметров Q</u> ж), <u>и такое, что $\frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} \neq 0$, то канонические уравнения</u>

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{5}$$

<u>решаются явно в квадратурах. При этом функции $Q(p,q)$, определенные уравнениями $\frac{\partial S(Q,q)}{\partial q} = p$, являются n первыми интегралами уравнений</u> (5).

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим каноническое преобразование с производящей функцией $S(Q,q)$. Имеем согласно (2)

ж) n-параметрическое семейство решений уравнения (4) называется <u>полным интегралом уравнения</u>.

$p = \frac{\partial S}{\partial q}(Q,q)$, откуда находим $Q(p,q)$.
Вычислим функцию $H(p,q)$ в новых координатах P, Q.
Имеем $H(p,q) = H\left(\frac{\partial S}{\partial q}(Q,q), q\right)$.
Чтобы найти функцию Гамильтона в новых координатах, надо было бы подставить в это выражение (после дифференцирования) вместо q его выражение через P и Q. Однако, согласно (4), это выражение от q вовсе не зависит, так что просто

$$H(p,q) = K(Q)$$

Таким образом, в новых переменных уравнения (5) имеют вид (3), откуда непосредственно вытекает <u>теорема Якоби</u>.

Теорема Якоби сводит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) к отысканию полного интеграла уравнения в частных производных (4). Может показаться удивительным, что такое сведение более простого к более сложному доставляет эффективный метод решения конкретных задач. Между тем, оказывается, что это - самый сильный из существующих методов точного интегрирования, и многие задачи, решенные Якоби, вообще не поддаются решению другими методами.

Среди многочисленных достижений Якоби, отметим задачу о притяжении двумя неподвижными центрами. Между прочим, интерес к этой задаче возрос в последнее время в связи с изучением движения искусственных спутников Земли. Достаточно ясно, что два близких притягивающих центра на оси z аппроксимируют притяжение слегка вытянутого вдоль оси z

эллипсоида.

К несчастью, Земля не вытянута, а сплюснута. Выход состоит в том, чтобы поместить центры в мнимые точки, на расстоянии $\pm ic$ вдоль оси z. Аналитические формулы для решения сохраняют, конечно, силу и в комплексной области. Таким образом получается приближение к полю тяготения Земли, в котором уравнения движения точно интегрируются, и которое ближе к реальности, чем кеплеровское приближение (Земля = точка).

Я рассмотрю здесь для простоты лишь плоскую задачу о притяжении двумя неподвижными равными массами. Успех метода Якоби основан на применении подходящей системы координат — т.н. эллиптических координат. Пусть расстояние между неподвижными точками O_1, O_2 равно $2c$, а расстояния движущейся массы от них равны r_1 и r_2. Эллиптические координаты ξ, η определяются как сумма и разность расстояний до точек O_1, O_2: $\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$.

Задача. Выразить функцию Гамильтона через эллиптические координаты.

Решение. Линии $\xi = const$ суть эллипсы с фокусами в O_1 и O_2, $\eta = const$ — гиперболы с теми же фокусами. Они взаимно ортогональны, поэтому $ds^2 = a^2 d\xi^2 + b^2 d\eta^2$. Найдем коэффициенты a и b. При движении вдоль эллипса имеем

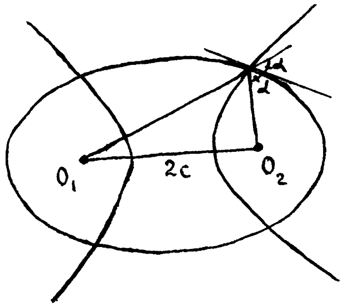
$$dr_1 = ds\cos\alpha, \quad dr_2 = -ds\cos\alpha, \quad d\eta = 2\cos\alpha\, ds$$

При движении вдоль гиперболы имеем $dr_1 = ds\sin\alpha$,

$$dr_2 = ds\cdot\sin\alpha, \quad d\xi = 2\sin\alpha\, ds$$

. Итак,

$$a = (2\sin\alpha)^{-1}, \quad b = (2\cos\alpha)^{-1}$$

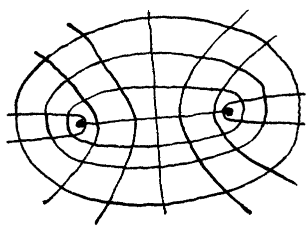


Далее, из треугольника O_1MO_2 находим

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 2\alpha = 4c^2$$

откуда

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{4c^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}$$



$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{2r_1r_2}{2r_1r_2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{4c^2-(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{(r_1+r_2)^2-4c^2}{4r_1r_2}$$

Но если $ds^2=\sum a_i^2 dq_i^2$, то $T=\sum a_i^2\frac{\dot q_i^2}{2}$, $p_i=a_i^2\dot q_i$

$$H=\sum\frac{p_i^2}{2a_i^2}+U.$$

Итак,

$$H=p_\xi^2\frac{(r_1+r_2)^2-4c^2}{2r_1r_2}+p_\eta^2\frac{4c^2-(r_1-r_2)^2}{2r_1r_2}-\frac{K}{r_1}-\frac{K}{r_2}$$

Но $r_1+r_2=\xi$, $r_1-r_2=\eta$, $4r_1r_2=\xi^2-\eta^2$. Поэтому окончательно

$$H=2p_\xi^2\frac{\xi^2-4c^2}{\xi^2-\eta^2}+2p_\eta^2\frac{4c^2-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}-\frac{4K\xi}{\xi^2-\eta^2}$$

Теперь будем решать уравнение Гамильтона-Якоби.

<u>Определение</u>. Если в уравнение

$$\Phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1,\ldots,q_n\right)=0$$

переменная q_1 и производная $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ входит лиш- в виде комбанации $\varphi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1\right)$, то говорят, что переменная q_1 <u>отделяется</u>.

В этом случае мы немедленно можем найти однопараметрическое семейство решений исходного уравнения. А именно, если из уравнения $\varphi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1\right)=C_1$ выразим $\frac{\partial S_1}{\partial q_1}=\psi_1(q_1,C_1)$, то $S_1(q_1,C_1)=\int^{q_1}\psi_1(q_1,C_1)\,dq_1$ будет решением исходного уравнения.

Теперь, полагая в исходном уравнении $\varphi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1\right)=C_1$, получаем уравнение

$$\Phi_2\left(\frac{\partial S}{\partial q_2},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_n}, q_2,\ldots,q_n; C_1\right)=0$$

с меньшим числом переменных; если $S(q_2,\ldots,q_n;C_1,C)$ – семейство решений этого уравнения, зависящее от параметров C, то функции $S_1(q_1,C_1)+S'(q_2,\ldots,q_n;C_1,C)$ будут удовлетворять исходному уравнению.

Если в новом уравнении (с Φ_2) отделяется одна из переменных, скажем q_2, мы можем повторять эту процедуру, и в благоприятном случае, найдем зависящее от n постоянных решение исходного уравнения

$$S_1(q_1,C_1)+S_2(q_2,C_1,C_2)+\ldots+S_n(q_n,C_1,\ldots,C_n)$$

таком случае говорят, что переменные <u>полностью разделяются</u>.

Если переменные полностью разделяются, то зависящее от n параметров решение уравнения Гамильтона-Якоби $\Phi_1 = 0$ находится квадратурами. Но тогда, интегрируется в квадратурах и соответствующая система канонических уравнений (теорема Якоби).

Применим сказанное к задаче о двух неподвижных центрах. Уравнение Гамильтона-Якоби (4) имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) = K(\xi^2 - \eta^2) + 4K\xi$$

Мы можем разделить переменные, например, полагая

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) - 4K\xi - K\xi^2 = C_1$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) + K\eta^2 = -C_1$$

Тогда находим полный интеграл уравнения (4) в виде

$$S(\xi, \eta, C_1, C_2) = \int \sqrt{\frac{C_1 + C_2\xi^2 + 4K\xi}{\xi^2 - 4c^2}}\, d\xi + \int \sqrt{\frac{-C_1 - C_2\eta^2}{4c^2 - \eta^2}}\, d\eta, \quad K = C_2$$

Теорема Якоби дает теперь явное выражение движения в задаче о двух неподвижных центрах через эллиптические интегралы. Подробное качественное исследование этого движения можно найти в книге Шарлье „Небесная механика", Москва, 1966.

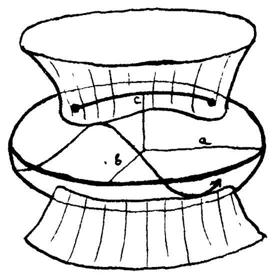
В качестве другого примера рассмотрим задачу о геодезических на трехосном эллипсоиде. Здесь помогают эллиптические координаты Якоби $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которые суть три корня уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda} + \frac{x_3^2}{a_3+\lambda} = 1 \quad , \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \quad .$$

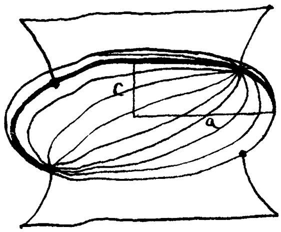
где x_1, x_2, x_3 - декартовы координаты. Я не буду приводить выкладок, показывающих, что переменные разделяются (их можно найти, например, в "Лекциях по динамике" Якоби), но приведу лишь результат: я опишу качественное поведение геодезических.

Поверхности $\lambda_1 = const$, $\lambda_2 = const$, $\lambda_3 = const$ суть поверхности второго порядка, называемые софокусными. Одна из них эллипсоид. другая однополостный гиперболоид, третья - двуполостный. Эллипсоид может вырождаться во внутренность эллипса, однополостный гиперболоид - во внешность эллипса или в часть плоскости между ветвями гиперболы, двуполостный - в часть плоскости вне ветвей гиперболы или в плоскость.

Пусть рассматриваемый эллипсоид - один из эллипсоидов семейства, с полуосями $a > b > c$. Каждый из трех эллипсов $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ есть замкнутая геодезическая. Геодезическая выходящая из точек большего эллипса (с полуосями a, b) по направлению, близкому к направлению эллипса касается поочередно двух замкнутых линий пересечения эллипсоида с однополостным гиперболоидом нашего семей-

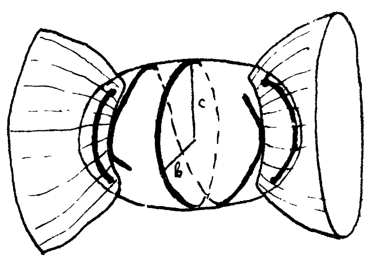


ства $\lambda = const$.*)
эта геодезическая либо замкнута, либо заполняет кольцо между линиями пересечения всюду плотно. По мере увеличения наклона геодезической, гиперболы сжимаются к области "внутри" гиперболы, пересекающей наш эллипсоид в его 4-х "точках округления". В предельном случае мы получаем геодезические, проходящие через точки округления.



Интересно отметить, что все геодезические, выходящие из точки округления, снова собираются вместе в противоположной точке округления, и все они имеют между двумя точками округления одинаковую длину. Однако только одна из этих геодезических замкнута: это средний эллипс с полуосями a, c. Если идти вдоль любой другой геодезической, проходящей через точку округления, в любую сторону, то мы будем асимптотически приближаться к этому эллипсу.

Наконец, еще более "круто" пересекающие большой эллипс геодезические касаются поочередно двух линий пересечения нашего эллипсоида с двуполостным гиперболоидом.*) Они заполняют, вообще говоря, всюду плотно кольцо между этими линиями.



*) Эти линии пересечения софокусных поверхностей являются также линиями кривизны эллипсоида.

Среди таких геодезических выделяется малый эллипс с полуосями b, c.

ЛЕКЦИЯ 34

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Более подробное изучение канонических преобразований удобно начать с линейных канонических преобразований. Такие преобразования называются симплектическими, и с ними связана геометрия, освежающе не похожая на мир, в котором мы живем.

Пусть $\mathbb{R}^{2n}$ – четномерное линейное пространство.

Определение. Симплектической структурой в $\mathbb{R}^{2n}$ называется невырожденная*) билинейная кососимметрическая 2-форма, заданная в $\mathbb{R}^{2n}$. Эта форма называется кососкалярным произведением и обозначается $[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$.

Пространство $\mathbb{R}^{2n}$ вместе с симплектической структурой $[\,,\,]$ называется симплектическим пространством.

Пример. Пусть $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n$ – координатные функции в $\mathbb{R}^{2n}$, и ω^2 – форма

$$\omega^2=\sum_{i=1}^{n} p_i\wedge q_i$$

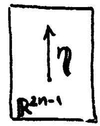
Поскольку эта форма невырождена и кососимметрична, ее можно принять за кососкалярное произведение: $[\xi,\eta]=\omega^2(\xi,\eta)$. Таким образом, координатное пространство $\mathbb{R}^{2n}=\{(\mathbf{p},\mathbf{q})\}$ получает симплектическую структуру. Эта структура называется стандартной. В стандартной симплектической структуре кососкалярное произведение двух векторов ξ,η равно сумме ориентированных площадей параллелограмма ξ,η на n

---

*) Напомню, что 2-форма $[\,,\,]$ в $\mathbb{R}^{2n}$ невырождена, если $([\xi,\eta]=0\ \forall\eta)\Rightarrow(\xi=0)$

координатных плоскостей p_i, q_i .

Два вектора ξ, η в симплектическом пространстве называются <u>косоортогональными</u>, $\xi \curlywedge \eta$, если их кососкалярное произведение равно 0.



<u>Задача</u>. Докажите, что $\xi \curlywedge \xi$: каждый вектор себе косоортогонален.

Множество всех векторов ξ , косоортогональных данному вектору η , называется <u>косоортогональным дополнением к</u> η .

<u>Задача</u>. Докажите, что косоортогональное дополнение к η есть $2n-1$ - мерная гиперплоскость, содержащая η .

<u>Указание</u>. Если бы все вектора были косоортогональны η , то форма $[\,,\,]$ была бы вырожденной.

Симплектическая структура очень похожа на евклидову. Евклидова структура, при подходящем выборе базиса (он должен быть ортонормирован) задается скалярным произведением специального стандартного вида. Точно так же и симплектическая структура принимает стандартный вид, указанный выше, в надлежащем базисе.

<u>Задача</u>. Найти кососкалярные произведения базисных векторов e_{p_i}, e_{q_i} $(i=1,\dots,n)$ в приведенном выше примере.

<u>Решение</u>. Из определения $\sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i$ следуют соотношения

$$[e_{p_i}, e_{p_j}] = [e_{p_i}, e_{q_j}] = [e_{q_i}, e_{q_j}] = 0, \quad [e_{p_i}, e_{q_i}] = 1 \qquad (I)$$

Вернемся теперь к общему симплектическому пространству.

Определение. Симплектическим базисом называются $2n$ векторов e_{p_i}, e_{q_i} $(i = 1,\dots,n)$, кососкалярные произведения которых имеют вид (I).

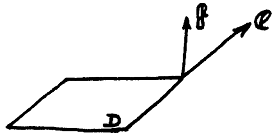
Иными словами, каждый базисный вектор кособртогонален всем базисным векторам, кроме одного, с ним сопряженного; а произведение сопряженных векторов равно ± 1.

ТЕОРЕМА. В каждом симплектическом пространстве существует симплектический базис. Более того, за первый вектор базиса можно взять любой ненулевой вектор e.

Эта ~~теорема~~ вполне аналогична соответствующей теореме евклидовой геометрии и доказываются почти так же.

Поскольку вектор e не нулевой, существует ему не кособртогональный вектор (форма $[\,,\,]$ невырождена!). Выбрав длину этого вектора, можно добиться того, что его кососкалярное произведение с e, стáнет равным I, $[e,f]=1$. В случае $n=1$ террема доказана.

Если же $n>1$, рассмотрим кособртогональное дополнение D к паре векторов e, f. D есть пересечение кособртогональных дополнений к e и f.



Эти два $2n-1$ -мерные подпространства не совпадают, так как e не лежит в кособртогональном дополнении к f. Поэтому их пересечение D имеет четную размерность $2n-2$

4^x-1427

Покажем, что D есть симплектическое подпространство $\mathbb{R}^{2n}$, т.е. что кососкалярное произведение $[\,,\,]$ на D невырождено. Действительно, если бы вектор $\xi \in D$ был косоортогонален всему пространству D, то будучи косоортогонален также e и f, этот вектор ξ косоортогонален $\mathbb{R}^{2n}$, что противоречит невырожденности $[\,,\,]$ на $\mathbb{R}^{2n}$. Итак, D^{2n-2} симплектическое.

Теперь, если добавить к косоортогональному базису в D^{2n-2} вектора e и f, мы получим косоортогональный базис в $\mathbb{R}^{2n}$, и доказательство теоремы завершается индукцией по размерности n.

Если принять векторы симплектического базиса за координатные орты, то мы получим систему координат p, q, в которой $[\,,\,]$ принимает стандартный вид $[\,,\,] = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Такая система координат называется <u>симплектической</u>.

С евклидовой структурой связана ортогональная группа линейных отображений, сохраняющих евклидову структуру. В симплектическом пространстве аналогичную роль играет <u>симплектическая группа</u>.

<u>Определение</u>. Линейное преобразование $S: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$ в себя называется <u>симплектическим</u>, если оно сохраняет кососкалярное произведение:

$$[S\xi, S\eta] = [\xi, \eta] \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^{2n}$$

Множество всех симплектических преобразований $\mathbb{R}^{2n}$ называется <u>симплектической группой</u> и обозначается $Sp(n)$.

Что произведение двух симплектических преобразований симплектическое - очевидно. Чтобы оправдать термин <u>симплектическая группа</u> нужно только доказать, что симплектическое преобразование невырождено - тогда ясно, что обратное также симплектично.

<u>Задача</u>. Докажите, что группа $Sp(1)$ изоморфна группе вещественных матриц второго порядка с определителем I, и гомеоморфна трехмерной внутренности баранки.

<u>ТЕОРЕМА</u>. <u>Преобразование $S: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ стандартного симплектического пространства (p,q) симплектическое тогда и только тогда, когда оно линейное и каноническое, т.е. сохраняет дифференциальную 2-форму</u>

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

<u>Доказательство</u>. При естественном отождествлении касательного пространства с $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}^{2n}$ 2-форма ω^2 переходит в $[\xi, \eta]$.

<u>Следствие</u>. <u>Определитель любого симплектического преобразования равен I.</u>

<u>Доказательство</u>. Мы уже знаем, (лекция 30), что канонические преобразования сохраняют внешние степени формы ω^2. Но ее n-ая внешняя степень есть (с точностью до постоянного множителя) элемент объема в $\mathbb{R}^{2n}$. Значит, симплектические преобразования S <u>стандартного</u> $\mathbb{R}^{2n} = \{(p,q)\}$

сохраняют элемент объема, так что $\det S = 1$

Но поскольку всякая симплектическая структура записывается в стандартном виде в симплектической системе координат, определетилеь симплектического преобразования любого симплектического пространства равен I.

ТЕОРЕМА. Линейное преобразование $S: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ симплектично тогда и только тогда, когда оно переводит некоторый (и тогда любой) симплектический базис в симплектический.

Доказательство. Кососкалярное произведение любых двух линейных комбинаций базисных векторов выражается через кососкалярные произведения базисных векторов. Если преобразование не меняет кососкалярные произведения базисных векторов, то оно не меняет и кососкалярные произведения любых двух векторов.

Задача. Докажите, что ненулевой вектор симплектического пространства можно перевести в любой другой симплектическим преобразованием.

Задача. Докажите, что не всякую двумерную плоскость симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$ $n > 1$ можно получить из данной 2-плоскости симплектическим преобразованием.

Указание. Рассмотрите плоскости (p_1, p_2) и (p_1, q_1)

Определение. k -мерная плоскость симплектического пространства называется нулевой, если она себе кососортогональна, т.е. кососкалярное произведение любых двух векторов плоскости равно 0.

Пример. Координатная плоскость $(p_1, \ldots\ldots, p_k)$ в симплектической системе координат p, q нулевая (докажите!).

Задача. Докажите, что любую ненулевую двумерную плоскость можно перевести в любую другую ненулевую симплектическим преобразованием.

При вычислениях в симплектической геометрии бывает полезно ввести в симплектическом пространстве еще какую-нибудь евклидову структуру. Мы зафиксируем симплектическую систему координат, p, q, и введем евклидову структуру с помощью координатного скалярного произведения $(x, x) = \sum p_i^2 + q_i^2$, где $x = \sum p_i e_{p_i} + q_i e_{q_i}$.

Симплектический базис e_p, e_q в этой евклидовой структуре ортонормирован. Кососкалярное произведение, как всякая билинейная форма, выражается через скалярное, в виде

$$[\xi, \eta] = (I\xi, \eta) \qquad (2)$$

где $I: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ - некоторый оператор. Из кососимметричности кососкалярного произведения следует, что оператор I кососимметричен.

Задача. Сосчитать матрицу оператора I в симплектическом базисе e_{p_i}, e_{q_i}.

Ответ. $I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где E - единичная матрица порядка n.

Таким образом, при $n = 1$ (на плоскости p, q) I есть просто поворот на 90^0, а в общем случае I есть поворот на 90^0

в каждой из n плоскостей p_i, q_i

<u>Задача</u>. Доказать, что оператор I <u>симплектический</u>, и что $I^2 = -E_{2n}$.]Хотя евклидова структура и оператор I связаны с симплектическим пространством неинвариантно, они часто бывают удобны.

Из (2) непосредственно вытекает

<u>ТЕОРЕМА</u>. <u>Плоскость π симплектического пространства нулевая тогда и только тогда, когда плоскость $I\pi$ ортогональна π , $I\pi \perp \pi$</u> . Заметим, что размерности плоскостей π и $I\pi$ совпадают, так как оператор I невырожден. Отсюда

<u>Следствие</u>. <u>Размерность нулевой плоскости в $\mathbb{R}^{2n}$ не превосходит n</u> .

Действительно, две k -мерные плоскости π и $I\pi$ в $\mathbb{R}^{2n}$ не могут быть ортогональными, если $k > n$.

Рассмотрим несколько подробнее n -мерные нулевые плоскости в координатном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Примером такой плоскости служит координатная p -плоскость. Всего n -мерных координатных плоскостей в $\mathbb{R}^{2n} = \{(p,q)\}$ имеется C_{2n}^n .

<u>Задача</u>. Доказать, что среди C_{2n}^n n-мерных координатных плоскостей нулевых равно 2^n . А именно, каждому из 2^n разбиений множества $(1, \ldots, n)$ на две части $(i_1, \ldots, i_k)(j_1, \ldots, j_{n-k})$ соответствует нулевая координатная плоскость $p_{i_1} \ldots p_{i_k} q_{j_1} \ldots q_{j_{n-k}}$

При изучении производящих функций канонических преобразований нам потребуется

ТЕОРЕМА. Всякая n -мерная нулевая плоскость π в симплектическом координатном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ трансверсальна[*] хотя бы одной из 2^n координатных нулевых плоскостей.

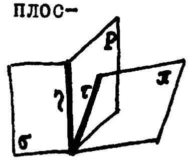
Доказательство. Пусть P - нулевая плоскость $p_1, \dots, p_n$. Рассмотрим пересечение

$$\tau = \pi \cap P$$

Пусть размерность τ равна k $0 \leq k \leq n$. Как всякое k -мерное подпространство n -мерного пространства P, плоскость τ трансверсальна хотя бы одной $n-k$ -мерной координатной плоскости в P,

$$\eta = (p_{i_1}, \dots, p_{i_{n-k}});\ \tau + \eta = P,\ \tau \cap \eta = 0$$

Построим нулевую n -мерную координатную плоскость



$$\sigma = (p_{i_1}, \dots, p_{i_{n-k}}, q_{j_1}, \dots, q_{j_k}),\ \eta = \sigma \cap P$$

и докажем, что наша плоскость π трансверсальна σ:

$$\pi \cap \sigma = 0$$

Действительно, имеем

$$\left.\begin{array}{l} \tau \subset \pi,\ \pi \measuredangle \pi \Rightarrow \tau \measuredangle \pi \\ \eta \subset \sigma,\ \sigma \measuredangle \sigma \Rightarrow \eta \measuredangle \sigma \end{array}\right\} \Rightarrow (\tau + \eta) \measuredangle (\pi \cap \sigma) \Rightarrow P \measuredangle (\pi \cap \sigma)$$

---

*) Два подпространства L_1 и L_2 линейного пространства L трансверсальны, если $L_1 + L_2 = L$. Две n -мерных плоскости в $\mathbb{R}^{2n}$ трансверсальны тогда и только тогда, когда они пересекаются лишь в точке 0.

ЛЕКЦИЯ 35

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ?

Применим развитый аппарат к исследованию собственных чисел симплектических преобразований (ср. лекцию 18, где разобран случаей $n=1$).

Рассмотрим линейное преобразование симплектического пространства $S: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. Пусть $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ – симплектическая система координат. В этой системе координат преобразование задается матрицей S .

ТЕОРЕМА. Чтобы преобразование было симплектическим, необходимо и достаточно, чтобы его матрица S в симплектической системе координат p, q удовлетворяя соотношению

$$S'IS = I \quad , \text{ где } I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

S' – матрица, транспонированная S

Доказательство.

Условие симплектичности ($[S\xi, S\eta] = [\xi, \eta]$ для всех ξ, η) с помощью оператора I записывается через скалярное произведение в виде

$$(IS\xi, S\eta) = (I\xi, \eta) \qquad \forall\, \xi, \eta$$

или еще $(S'IS\xi, \eta) = (I\xi, \eta) \quad \forall\, \xi, \eta$

Но P n-мерная нулевая плоскость. Поэтому всякий вектор, косоортогональный P, принадлежит P (см. следствие выше). Итак, $\pi \cap \sigma \subset P$. Окончательно,

$$\pi \cap \sigma = (\pi \cap P) \cap (\sigma \cap P) = \tau \cap \eta = 0$$

что и требовалось доказать.

<u>Задача</u>. Пусть π_1, π_2 - две k -мерные плоскости в симплектическом $\mathbb{R}^{2n}$. Всегда ли можно перевести π_1 в π_2 симплектическим преобразованием? Сколько существует классов плоскостей, не переводимых друг в друга?

<u>Ответ</u>. $\left[\frac{k}{2}\right]+1$, если $k \leq n$; $\left[\frac{2n-k}{2}\right]+1$, если $k \geq n$.

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ-ЛЯПУНОВА. Характеристический полином симплектического преобразования.

$$p(\lambda) = \det(S - \lambda E)$$

возвратный*), т.е. $p(\lambda) = \lambda^{2n} p(\frac{1}{\lambda})$

Доказательство.

Мы будем пользоваться тем, что $\det S = \det I = 1$, $I^2 = -E$, и $\det A' = \det A$, если A -матрица порядка $2n$. По предыдущей теореме, $S = -IS'^{-1}I$. Поэтому

$$p(\lambda) = \det(S - \lambda E) = \det(-IS'^{-1}I - \lambda E) = \det(-S'^{-1} + \lambda E) = \det(-S^{-1} + \lambda E) =$$
$$= \det(-E + \lambda S) = \lambda^{2n} \det(S - \tfrac{1}{\lambda}E) = \lambda^{2n} p(\tfrac{1}{\lambda})$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если λ -собственное число симплектического преобразования, то $\frac{1}{\lambda}$ - также собственное число.

С другой стороны, характеристический полином вещественен; поэтому, если λ -комплексное собственное число, то $\bar{\lambda}$ - тоже собственное число, притом не совпадающее с λ.

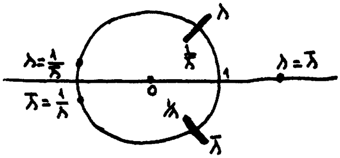
Отсюда вытекает, что все корни λ характеристического полинома лежат симметрично относительно вещественной оси и относительно единичной окружности. Они разбиваются на четверки: $\lambda, \bar{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}}$ $(|\lambda| \neq 1,\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0)$

---

*) Возвратным называется полином $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$ с симметричными коэффициентами: $a_0 = a_m, a_1 = a_{m-1}, \ldots$.

и пары лежащие на вещественной оси:

$$\lambda = \bar{\lambda}\ ,\ \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\bar{\lambda}}$$



или на единичной окружности:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}\ ,\ \bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Нетрудно сообразить, что кратности всех четырех точек четверки (или обеих точек пары) единаковы.

Определение. Преобразование называется устойчивым, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ |x| < \delta \Rightarrow |S^N x| < \varepsilon \ , \ \forall N > 0$$

Задача. Докажите, что если хотя бы одно из собственных чисел симплектического преобразования S лежит не на единичнои окружности, то S неустойчиво.

Указание. Ввиду доказанной симметрии, если хоть одно из собственных чисел лежит не на единичной окружности, существует собственное число вне единичного круга, $|\lambda| > 1$; в соответствующем инвариантном подпространстве S -"растяжение с поворотом".

Задача. Докажите, что если все собственные числа линейного преобразования различны и лежат на единичной окружности, то преобразование устойчиво.

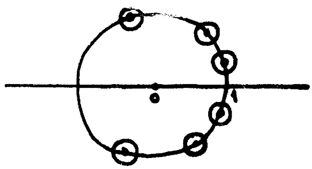
Указание. Перейти к собственному базису.

Определение. Симплектическое преобразование S называется сильно устойчивым, если всякое достаточно близкое к нему[ж)] симплектическое преобразование S' устойчиво.

В лекции I8 мы установили, что $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ сильно устойчиво, если $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

ТЕОРЕМА. Если все $2n$ собственных числа симплектического преобразования S различны и лежат на единичной окружности, то преобразование S сильно устойчиво.

Доказательство. Заключим $2n$ собственных чисел λ в $2n$ непересекающихся окрестностей, симметричных относительно единичной окружности и вещественной оси. $2n$ корней характеристического полинома зависят от элементов матрицы S непрерывно. Следовательно, если матрица S' достаточно близка к S, то в каждой из $2n$ окрестностей $2n$ точек λ лежит ровно I собственное число λ' матрицы S'.

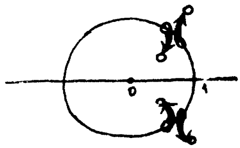


Но если бы какая-либо из точек λ' не лежала на единичной окружности, а, например, вне, то, по теореме Пуанкаре-Ляпунова в той же окрестности лежала бы еще одна точка λ', $|\lambda'|<1$, и общее число корней было бы больше $2n$, что невозможно.

ж) S' "достаточно близко" к S, если элементы матрицы S' в фиксированном базисе отличаются от элементов матрицы S в том же базисе меньше, чем на достаточно малое число ε.

Итак, все корни S' лежат на единичной окружности и различны; значит S' устойчиво, что и требовалось доказать.

Можно сказать, что собственное число симплектического преобразования λ может покинуть единичную окружность лишь столкнувшись с другим собственным числом; при этом одновременно сталкиваются комплексно-сопряженные числа, и из двух пар корней на окружности получается одна четверка (или пара вещественных λ).



Из результатов лекции 18 следует, что условия возникновения параметрического резонанса в линейной канонической системе с периодически меняющейся функцией Гамильтона состоят как раз в том, что соответствующее симплектическое преобразование фазового пространства перестает быть устойчивым. Из доказанной теоремы видно, что это может случиться лишь при столкновении собственных чисел на единичной окружности. В действительности, как заметил М.Г.Крейн, не всякое такое столкновение опасно.

Оказывается, собственные числа λ, $|\lambda|=1$, делятся на два класса: положительные и отрицательные. При столкновении двух корней одинакового знака корни "проходят друг сквозь друга", и не могут сойти с единичной окружности. Напротив, два корня разных знаков при столкновении, вообще говоря, покидают единичную окружность.

Теория М.Г.Крейна выходит за рамки этих лекций, но я сформулирую основные результаты в виде задач.

5-1427

<u>Задача.</u> Пусть $\lambda, \bar{\lambda}$ – простые (кратности 1) собственные числа симплектического преобразования S и $|\lambda|=1$. Докажите, что соответствующая $\lambda, \bar{\lambda}$ двумерная инвариантная плоскость π_λ <u>ненулевая</u>.

<u>Указание</u>. Пусть ξ_1, ξ_2 – комплексные собственные вектора S с собственными значениями λ_1, λ_2. Тогда, если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 1$, вектора ξ_1, ξ_2 косоортогональны: $[\xi_1, \xi_2]=0$.

Пусть ξ вещественный вектор из плоскости π_λ, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $|\lambda|=1$. Собственное число λ называется <u>положительным</u>, если $[S\xi, \xi] > 0$.

<u>Задача</u>. Докажите, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора вектора $\xi \neq 0$ в плоскости π_λ.

<u>Указание</u>. Если бы плоскость π_λ содержала два косоортогональных неколлинеарных вектора, она была бы нулевой.

Точно так же, k -кратное собственное число λ, $|\lambda|=1$ <u>знакоопределенное</u>, если квадратичная форма

$$[S\xi, \xi]$$

знакоопределена на соответствующем $\lambda, \bar{\lambda}$ инвариантном $2k$ -мерном подпространстве.

<u>Задача</u>. Докажите, что для сильной устойчивости S необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа λ лежали на единичной окружности и были знакоопределенными.

<u>Указание</u>. Квадратичная форма $[S\xi, \xi]$ инвариантна относительно S.

<u>Добавление.</u> <u>Симплектическая структура и комплексная структура.</u>

Поскольку $I^2 = -E$, мы можем ввести в наше пространство $\mathbb{R}^{2n}$ наряду с симплектической структурой $[\,,\,]$, и евклидовой структурой $(\,,\,)$ еще и комплексную структуру, определяя умножение на $i = \sqrt{-1}$ как действие I. Пространство $\mathbb{R}^{2n}$ отождествляется при этом с комплексным пространством $\mathbb{C}^n$ (если угодно, координатным пространством с координатами $z_k = p_k + iq_k$).

Линейные преобразования $\mathbb{R}^{2n}$, сохраняющие евклидову структуру, образуют <u>ортогональную группу</u> $O(2n)$, сохраняющие комплексную структуру – <u>комплексную линейную группу</u> $GL(n,\mathbb{C})$.

<u>Задача.</u> Докажите, что ортогональные и одновременно симплектические преобразования комплексны, комплексные и ортогональные симплектичны, а симплектические и комплексные ортогональны, так что перессечение новых двух из трех групп равны пересечению всех трех:

$$O(2n) \cap Sp(2n) = Sp(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}) = GL(n,\mathbb{C}) \cap O(2n) = U(n)$$

Это пересечение называется <u>унитарной группой</u> $U(n)$.

Унитарные преобразования сохраняют эрмитово скалярное произведение $(\xi, \eta) + i[\xi, \eta]$; скалярное и кососкалярное произведения в $\mathbb{R}^{2n}$ – это его вещественная и мнимая части.

ЛЕКЦИЯ 36.

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Вернемся теперь к общему каноническому преобразованию $g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, $g(p,q) = P, Q$.
Напомню, что каноническим такое преобразование будет тогда и только тогда, когда дифференциальная I-форма на $\mathbb{R}^{2n}$

$$p\,dq - P\,dQ = dS$$

будет полным дифференциалом некоторой функции $S(p,q)$.
В лекции 32 мы рассматривали свободные канонические преобразования (за независимые $2n$ координат можно принять q, Q). В этом случае мы назвали функцию S, выраженную через координаты q, Q, производящей функцией $S_1(q, Q)$; зная эту единственную функцию, можно найти все $2n$ функций, $P(p,q)$, $Q(p,q)$, задающих преобразование, из соотношений

$$p = \frac{\partial S_1(q,Q)}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial S_1(q,Q)}{\partial Q} \tag{I}$$

Однако далеко не всякое каноническое преобразование - свободное. Например, в случае тождественного преобразования координаты q, $Q = q$ зависимы; поэтому для важного класса преобразований, близких к тождественному, производящая функция S_1 непригодна.

Однако можно перейти к производящей функции иного вида посредством преобразования Лежандра. Пусть, например, за независимые координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ можно принять $\mathbb{P}, \mathbb{q}$. (т.е. $\det \frac{\partial(\mathbb{P},\mathbb{q})}{\partial(\mathbb{p},\mathbb{q})} = \det \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbb{p}} \neq 0$).
Тогда имеем

$$\mathbb{p}d\mathbb{q} - \mathbb{P}d\mathbb{Q} = dS, \quad \mathbb{p}d\mathbb{q} + \mathbb{Q}d\mathbb{P} = d(\mathbb{P}\mathbb{Q} + S)$$

Величина $\mathbb{P}\mathbb{Q} + S$, выраженная через $\mathbb{P}, \mathbb{q}$, называется также <u>производящей функцией</u>

$$S_2(\mathbb{P},\mathbb{q}) = \mathbb{P}\mathbb{Q} + S(\mathbb{p},\mathbb{q})$$

Для этой функции находим

$$\mathbb{p} = \frac{\partial S_2(\mathbb{P},\mathbb{q})}{\partial \mathbb{q}}, \quad \mathbb{Q} = \frac{\partial S_2(\mathbb{P},\mathbb{q})}{\partial \mathbb{P}} \tag{2}$$

Обратно, если $S_2(\mathbb{P},\mathbb{q})$ - произвольная функция, для которой $\det \frac{\partial^2 S_2(\mathbb{P},\mathbb{q})}{\partial \mathbb{q}\,\partial \mathbb{P}}\Big|_{\mathbb{P}_0,\mathbb{q}_0} \neq 0$, то в окрестности точки $\left(\mathbb{q}_0, \mathbb{p}_0 = \frac{\partial S_2(\mathbb{P},\mathbb{q})}{\partial \mathbb{q}}\Big|_{\mathbb{P}_0,\mathbb{q}_0}\right)$ можно разрешить первую группу уравнений (2) относительно $\mathbb{P}$ и получить функции $\mathbb{P}(\mathbb{p},\mathbb{q})$ (где $\mathbb{P}(\mathbb{p}_0,\mathbb{q}_0) = \mathbb{P}_0$). После этого вторая группа уравнений (2) определяет $\mathbb{Q}(\mathbb{p},\mathbb{q})$, и отображение $(\mathbb{p},\mathbb{q}) \to (\mathbb{P},\mathbb{Q})$ - каноническое (докажите!).

<u>Задача</u>. Найти производящую функцию S_2 для тождественного отображения $\mathbb{P} = \mathbb{p}$, $\mathbb{Q} = \mathbb{q}$.

Ответ. $\mathbb{P}\mathbb{q}$.

Замечание. Производящая функция $S_2(\mathbb{P},\mathbb{q})$ удобна еще и потому, что в формулах (2) нет минусов, и их легко вспомнить, если помнить, что производящая функция тождественного преобразования есть $\mathbb{P}\mathbb{q}$.

К сожалению, переменные $\mathbb{P},\mathbb{q}$ также не всегда могут быть выбраны за локальные координаты. Однако всегда можно выбрать некоторый набор n новых координат

$$\mathbb{P}_{\mathbf{i}} = (P_{i_1},\ldots,P_{i_k}), \quad \mathbb{Q}_{\mathbf{j}} = (Q_{j_1},\ldots,Q_{j_{n-k}})$$

так, что вместе со старыми $\mathbb{q}$ мы получим $2n$ независимых координат.

Здесь $(i_1,\ldots,i_k)(j_1,\ldots,j_{n-k})$ – любое разбиение множества $(1,\ldots,n)$ на две непересекающихся части, так что всего имеется 2^n случаев.

ТЕОРЕМА. Пусть $g: \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ – каноническое преобразование, заданное функциями $\mathbb{P}(\mathbb{p},\mathbb{q})$, $\mathbb{Q}(\mathbb{p},\mathbb{q})$. В окрестности каждой точки $\mathbb{p}_0,\mathbb{q}_0$ можно принять за независимые координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ по меньшей мере один из 2^n наборов функций $(\mathbb{P}_{\mathbf{i}},\mathbb{Q}_{\mathbf{j}},\mathbb{q})$:

$$\det\frac{\partial(\mathbb{P}_{\mathbf{i}},\mathbb{Q}_{\mathbf{j}},\mathbb{q})}{\partial(\mathbb{p}_{\mathbf{i}},\mathbb{p}_{\mathbf{j}},\mathbb{q})} = \det\frac{\partial(\mathbb{P}_{\mathbf{i}},\mathbb{Q}_{\mathbf{j}})}{\partial(\mathbb{p}_{\mathbf{i}},\mathbb{p}_{\mathbf{j}})} \neq 0$$

В окрестности такой точки можно восстановить каноническое преобразование g по функции

$$S_3(\mathbb{P}_{\mathbf{i}},\mathbb{Q}_{\mathbf{j}},\mathbb{q}) = (\mathbb{P}_{\mathbf{i}},\mathbb{Q}_{\mathbf{i}}) + \int \mathbb{p}\,d\mathbb{q} - \mathbb{P}\,d\mathbb{Q}$$

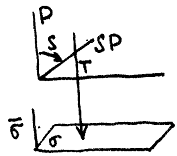
из соотношений

$$\mathbb{P} = \frac{\partial S_3}{\partial \mathbb{q}}, \quad \mathbb{Q}_i = \frac{\partial S_3}{\partial \mathbb{P}_i}, \quad -\mathbb{P}_j = \frac{\partial S_3}{\partial \mathbb{Q}_j} \qquad (3)$$

Обратно, если $S_3(\mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_j, \mathbb{q})$ – любая функция, для которой отличен от 0 определитель $\det \frac{\partial^2 S_3}{\partial \mathbb{R} \partial \mathbb{q}}\Big|_{\mathbb{R}_0, \mathbb{q}_0}$ $(\mathbb{R} = \mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_j)$, то соотношения (3) задают каноническое преобразование в окрестности некоторой точки $\mathbb{P}_0, \mathbb{q}_0$.

Доказательство этой теоремы почти такое же, как проведенное выше в частном случае $k = n$. Нужно лишь проверить, что для одного из 2^n наборов $(\mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_j, \mathbb{q})$ отличен от 0 определитель $\det \frac{\partial(\mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_j)}{\partial(\mathbb{P}_i, \mathbb{P}_j)}$.

Рассмотрим дифференциал нашего преобразования g в точке $\mathbb{P}_0, \mathbb{q}_0$. Отождествляя касательные пространства к $\mathbb{R}^{2n}$ с $\mathbb{R}^{2n}$, мы можем считать dg симплектическим преобразованием $S: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$.



Рассмотрим координатную P – плоскость, $P \in \mathbb{R}^{2n}$. Это нулевая n -мерная плоскость, и ее образ SP – тоже нулевая плоскость. Спроектируем плоскость SP на координатную плоскость $\sigma\,(\mathbb{p}_i, \mathbb{q}_j)$ параллельно остальным координатным осям, т.е. по направлению нулевой n -мерной координатной плоскости $\bar{\sigma}: (\mathbb{q}_i, \mathbb{P}_j)$. Обозначим через $T: SP \to \{(\mathbb{p}_i, \mathbb{q}_j)\}$ оператор проектирования.

Условие $\det \frac{\partial(\mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_j)}{\partial(\mathbb{P}_i, \mathbb{P}_j)} \neq 0$ означает невырожденность $TS : P \to \sigma$. Оператор S невырожден. Поэтому для невырожденности TS необходимо и достаточно, чтобы проектирование SP не вырождалось. Иными словами, нулевая плоскость SP должна быть трансверсальной нулевой координатной плоскости σ. Но мы доказали в лекции 34, что хотя бы одна из 2^n нулевых координатных плоскостей трансверсальна P. Значит один из наших 2^n определителей отличен от 0, что и требовалось доказать.

Задача. Доказать, что приведенная система 2^n видов производящих функций минимальна: существуют канонические преобразования, для которых отличен от нуля лишь один из 2^n определителей.

Бесконечно-малые канонические преобразования.

Рассмотрим теперь каноническое преобразование, близкое к тождественному. Его производящую функцию можно взять близкой к производящей функции тождества, $\mathbb{P}q$. Рассмотрим семейство канонических преобразований g_ε, дифференцируемо зависящее от параметра ε, так что производящая функция имеет вид

$$\mathbb{P}q + \varepsilon S(\mathbb{P}, q, \varepsilon) \ ; \ p = \mathbb{P} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial q} \ , \ \mathbb{Q} = q + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \mathbb{P}} \qquad (4)$$

Бесконечно-малым каноническим преобразованием называется класс эквивалентности семейств g_ε ; два семейства g_ε

и h_ε эквивалентны, если они отличаются **малыми выше перво-го порядка**, $|g_\varepsilon - h_\varepsilon| = O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0$.

ТЕОРЕМА. Бесконечно-малое каноническое преобразование удовлетворяет дифференциальным уравнениям Гамильтона

$$\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbb{q}}, \qquad \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial \mathbb{p}}$$

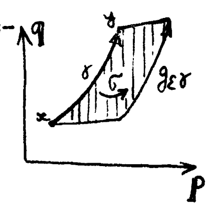
с функцией Гамильтона $H(\mathbb{p},\mathbb{q}) = S(\mathbb{P},\mathbb{q},0)$.

Доказательство. получается из формул (4): при $\varepsilon\to 0$, $\mathbb{P}\to\mathbb{p}$

Следствие. Однопараметрическая группа преобразований фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$ удовлетворяет каноническим уравнениям Гамильтона тогда и только тогда, когда преобразования канонические.

Функцию Гамильтона H называют в связи с этой теоремой "производящей функцией канонического бесконечно-малого преобразования". Заметим, что, в отличие от производящих функций S, функция H есть функция точки фазового пространства, инвариантно связанная с преобразованием.

Функция H имеет простой геометрический смысл. Пусть y и x – две точки $\mathbb{R}^{2n}$, γ – соединяющая их кривая, $\partial\gamma = y - x$, Рассмотрим сдвиги кривой γ, при наших преобразованиях $g_\tau\gamma$, $0\le\tau\le\varepsilon$. Они образуют полоску $\sigma(\varepsilon)$. Рассмотрим интеграл формы $\omega^2 = \sum dp_i\wedge dq_i$ по 2-цепи σ, $\partial\sigma = g_\varepsilon\gamma - \gamma + g_\tau y - g_\tau x$.



Задача. Докажите, что существует и не зависит от представителя класса g_ε

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma(\varepsilon)} \omega^2 = H(y) - H(x)$$

Из этого результат мы еще раз получаем уже известное

Следствие. При каноническом преобразовании канонические уравнения сохраняют свой вид, а также величину функции Гамильтона.

Действительно, мы вычислили приращение функции Гамильтона используя только бесконечно-малое каноническое преобразование и каноническую структуру $\mathbb{R}^{2n}$ – форму ω^2 .

Канонические многообразия.

Пусть M^{2n} – четномерное дифференцируемое многообразие. Канонической структурой на M^{2n} называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма на M^{2n} , ω^2 :

$$d\omega^2 = 0 \ ; \ \forall \xi \, \exists \eta : \ \omega^2(\xi, \eta) \neq 0 , \quad \xi, \eta \in TM_x$$

Пара (M^{2n}, ω^2) называется каноническим многообразием.

Пример I. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами p, q ; и пусть $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Задача. Докажите, что $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^2)$ – каноническое многообразие.

Пример 2. Пусть M^n – дифференцируемое n -мерное многообразие. Кокасательным пучком T^*M^n называется $2n$ -

мерное многообразие, точкой которого является **I-форма на** касательном пространстве к M в какой-либо точке M. Если q – локальные координаты на M, то такая I-форма задается n компонентами p; вместе p и q задают локальные координаты на T^*M. Оказывается, на T^*M имеется естественная каноническая структура.

<u>Задача</u>. Докажите, что дифференциальная I-форма на T^*M имеющая в локальных координатах вид $\omega^1 = p\,dq$, определена корректно в целом, т.е. не зависит от системы координат q.

<u>Задача</u>. Докажите, что дифференциальная 2-форма на T^*M, $\omega^2 = d\omega^1$, задает на T^*M каноническую структуру.

Заметим, что пример 2 имеет решающее значение для динамики: фазовое пространство механической системы есть как раз кокасательный пучок конфигурационного. Заметим также, что "импульс" p – не вектор, а I-форма на касательном пространстве к конфигурационному пространству.

Риманова структура на многообразии устанавливает изоморфизм между касательными векторами и I-формами. Каноническая структура также устанавливает подобный изоморфизм.

<u>Определение</u>. Сопоставим вектору ξ, касательному к каноническому многообразию (M, ω^2) в точке x, I-форму на TM_x, ω^1_ξ:

$$\omega^1_\xi(\eta) = \omega^2(\eta, \xi)$$

Задача. Доказать, что соответствие $\xi \to \omega^1_\xi$ есть изоморфизм линейных $2n$ -мерных пространств векторов и I-форм.

Пример. В $\mathbb{R}^{2n} = (p,q)$ будем отождествлять вектора и I-формы в соответствии с евклидовой структурой $(x,x) = p^2+q^2$. Тогда соответствие $\xi \to \omega^1_\xi$ задает преобразование $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$.

Задача. Вычислить матрицу этого преобразования в базисе p,q.

Ответ.

$$-I = \begin{pmatrix} 0 & +E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

В соответствии с этим мы будем обозначать через I построенный выше изоморфизм $I : T^*M_x \to TM_x$.

Пусть теперь H -функция на каноническом многообразии M^{2n}. Тогда dH есть дифференциальная I-форма на M, и ей соответствует, в каждой точке, некоторый касательный к M вектор. Мы получаем таким образом на M^{2n} векторное поле IdH.

Определение. Векторное поле IdH называется Гамильтоновым векторным полем, H - функцией Гамильтона.

Пример. Если $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n} = \{(p,q)\}$, то мы получаем поле IdH, т.е. поле фазовой скорости канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{x} = I \operatorname{grad} H(x) \Leftrightarrow \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

<u>Определение</u>. <u>Каноническим преобразованием</u> канонического многообразия (M^{2n}, ω^2) называется диффеоморфизм $g: M^{2n} \to M^{2n}$, сохраняющий каноническую структуру: $g^* \omega^2 = \omega^2$.

<u>Задача</u>. Докажите, что всякое гамильтоново векторное поле IdH задает однопараметрическую группу g_t канонических преобразований канонического многообразия M^{2n}.

<u>Задача</u>. Всякая ли однопараметрическая группа g_t канонических преобразований M^{2n} получается из Гамильтонова векторного поля IdH ?

<u>Ответ.</u> Нет, если M^{2n} неодносвязно. Векторные поля, задающие однопараметрические группы канонических преобразований, имеют вид $I\omega^1$, где ω^1 -замкнутая I-форма, которая может и не быть полным дифференциалом. Пример:

$$M^{2n} - \text{тор } T^2 = \{(p,q) \bmod 1\}, \quad g_t(p,q) = (p+\omega_1 t, q+\omega_2 t)$$

Понятие канонического многообразия можно было бы определить иным способом, при помощи <u>канонического атласа</u>.

Напомню, что в определении многообразия участвует условие совместности карт атласа. Это условие на отображения $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ перехода с одной карты на другую. Отображения $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ суть отображения областей координатного пространства.

<u>Определение</u>. Атлас многообразия M^{2n} называется каноническим, если в координатном пространстве $R^{2n} = (p,q)$ введена стандартная каноническая структура $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$, и переход с одной карты на другую осуществляется каноническим преобразованием.*)

---

*) Аналогично, определяются, например, комплексно-аналитические многообразия: в координатном пространстве должна быть комплексная структура, а переход с одной карты на другую должен быть комплексно-аналитическим.

Задача. Покажите, что канонический атлас определяет каноническую структуру.

Справедливо также и обратное предложение; каждое каноническое многообразие имеет канонический атлас. Доказательство основано на следующей теореме, которую я приведу здесь без доказательства.*)

ТЕОРЕМА. Пусть ω^2 – невырожденная замкнутая дифференциальная 2-форма в окрестности точки x пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда в окрестности точки x можно выбрать такую систему локальных координат $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, что форма примет стандартный вид

$$\omega^2 = \sum_i dp_i \wedge dq_i$$

Эта теорема позволяет немедленно распространить на все канонические многообразия любое утверждение локального характера, инвариантное относительно канонических преобразований, и доказанное для стандартного фазового пространства $\mathbb{R}^{2n} = \{(p,q)\}$.

Пример. Гамильтоново поле IdH в локальной системе координат p, q задает однопараметрическую группу канонических преобразований (фазовый поток с функцией Гамильтона H). Значит векторное поле IdH на любом каноническом многообразии M задает однопараметрическую группу канонических преобразований.

---

*) Доказательство можно найти, например, в книге П.К.Рашевского, "Геометрическая теория уравнений с частными производными".

ЛЕКЦИЯ 37-38.

СКОБКИ ПУАССОНА И АЛГЕБРЫ ЛИ

Пусть (M^{2n}, ω^2) - каноническое многообразие, т.е. четномерное многообразие M^{2n}, снабженное замкнутой невырожденной 2 формой ω^2. Напомню, что каждой функции $H: M^{2n} \to \mathbb{R}^1$, заданной на каноническом многообразии, соответствует однопараметрическая группа $g_H^t: M^{2n} \to M^{2n}$ канонических преобразований M^{2n} - фазовый поток, функция Гамильтона которого равна H.

Пусть $F: M^{2n} \to \mathbb{R}^1$ другая функция на многообразии M^{2n}.

Определение. Скобкой Пуассона функций H и F, заданных на каноническом многообразии M^{2n}, называется производная функции F по направлению фазового потока с функцией Гамильтона H:

$$(H,F)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(g_H^t x)$$

Таким образом, скобка Пуассона двух функций на M есть снова функция на M.

Следствие I. Функция F тогда и только тогда является первым интегралом фазового потока с функцией Гамильтона H, когда ее скобка Пуассона с H равна тождественно нулю: $(H,F) \equiv 0$.

Мы можем дать определению скобки Пуассона несколько иную форму, если воспользуемся изоморфизмом I между 1-формами и векторными полями на каноническом многообразии M^{2n}.

Этот изоморфизм определен соотношением (см. лекцию 36)

$$\omega^2(\eta, I\omega^1) = \omega^1(\eta)$$

Вектор скорости фазового потока g_H^t есть IdH. Отсюда вытекает

Следствие 2. Скобка Пуассона функций H и F равна значению 1-формы dF на векторе IdH скорости фазового потока с функцией Гамильтона H:

$$(H,F) = dF(IdH)$$

Пользуясь предыдущей формулой еще раз, получаем

Следствие 3. Скобка Пуассона функций H и F равна кососкалярному произведению векторов скоростей фазовых потоков с функциями Гамильтона H и F:

$$(H,F) = \omega^2(IdH, IdF)$$

Теперь становится очевидным

Следствие 4. Скобка Пуассона функции H и F является кососимметрической билинейной функцией от H и F

$$(H,F) = -(F,H), \quad (H, \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = \lambda_1 (H, F_1) + \lambda_2 (H, F_2)$$
$$\lambda_1, \lambda_2 = const$$

Сколь ни очевидны предыдущие рассуждения, они приводят к нетривиальным выводам, в том числе к следующему обобщению теоремы Э.Нетер:

ТЕОРЕМА. Если функция Гамильтона H, заданная на каноническом многообразии M^{2n}, выдерживает однопараметрическую группу канонических преобразований M^{2n}, заданную Гамильтонианом F, то F есть первый интеграл систем с функцией Гамильтона H.

Действительно, по условию H есть первый интеграл потока g^t_F. Значит $(F,H)=0$ (следствие 1). Поэтому $(H,F)=0$ (следствие 4) и F - первый интеграл (следствие 1).

Задача 1. Вычислить скобку Пуассона двух функций H, F в координатном каноническом пространстве $\mathbb{R}^{2n}=\{(p,q)\}$, $\omega^2(\xi,\eta)=[\xi,\eta]=(I\xi,\eta)$.

Решение. Согласно следствию 3, имеем

$$(H,F)=[IdH,IdF]=[\operatorname{grad}H,\operatorname{grad}F]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

(мы пользуемся симплектичностью I и тем, что I имеет вид $\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix}$ в базисе p,q).

Задача 2. Вычислить скобки Пуассона базисных функций p_i, q_j.

Решение. Градиенты базисных функций образуют симплектический базис, поэтому их кососкалярные произведения суть

$$(p_i,p_j)=(p_i,q_j)=(q_i,q_j)=0\ ,\quad (p_i,q_i)=-(q_i,p_i)=1$$

Задача 3. Докажите, что отображение $A:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$, $p,q\to P(p,q),Q(p,q)$ каноническое тогда и только тогда, когда скобки Пуассона любых двух функций по переменным p, q и P, Q совпадают:

$$(H,F)_{p,q} = \sum \frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial p} = \sum \frac{\partial H}{\partial P}\cdot\frac{\partial F}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial Q}\cdot\frac{\partial F}{\partial P} = (H,F)_{P,Q}$$

Решение. Пусть A каноническое, Тогда канонические структуры $\sum dp \wedge dq$ и $\sum dP \wedge dQ$ совпадают. Но определение скобки Пуассона (H, F) инвариантно связано с канонической структурой, а не с координатами. Поэтому

$$(H,F)_{p,q} = (H,F) = (H,F)_{P,Q}$$

Обратно, пусть скобки Пуассона $(P_i, Q_j)_{p,q}$ имеют стандартный вид задачи 2. Тогда, очевидно, $\sum dP\wedge dQ = \sum dp \wedge dq$, т.е. отображение A - каноническое.

Задача 4. Докажите, что скобка Пуассона произведения вычисляется по правилу Лейбница:

$$(H, F_1F_2) = F_1(H,F_2) + F_2(H,F_1)$$

Указание. Скобка Пуассона (H, F_1F_2) есть производная произведения F_1F_2 по направлению поля IdH.

Следующим весьма важным свойством скобок Пуассона является

Тождество Якоби.

ТЕОРЕМА. Скобки Пуассона трех функций A, B, C удовлетворяют тождеству Якоби

$$((A,B),C) + ((B,C),A) + ((C,A),B) = 0$$

доказать это можно прямой выкладкой в канонической системе координат. мы пока отложим доказательство, и рассмотрим некоторые следствия.

ТЕОРЕМА ПУАССОНА. Скобка Пуассона двух первых интегралов (F_1, F_2) системы с функцией Гамильтона H есть снова первый интеграл.

Доказательство. По тождеству Якоби

$$(H,(F_1,F_2)) = ((F_2,H),F_1) + ((H,F_1),F_2) = 0+0$$

таким образом, зная два первых интеграла, можно простой выкладкой получить третий, четвертый и т.д. Конечно, не все получающиеся интегралы будут существенно новыми, т.к. всего независимых функций на M^{2n} не более $2n$. Иногда может получиться функция от старых интегралов, или константа, или нуль. Но иногда получается и новый интеграл.

Задача. Сосчитать скобки Пуассона компонент P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3 векторов импульса и кинетического момента механической системы.

Ответ. $(M_1,M_2)=-M_3$, $(M_1,P_1)=0$, $(M_1,P_2)=-P_3$, $(M_1,P_3)=P_2$

Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА. Если в некоторой механической задаче сохраняются две компоненты кинетического момента M_1 и M_2 то сохраняется и третья.

Вернемся теперь к тождеству Якоби. Оно часто встречается в математике : например, векторное произведение в трехмерном евклидовом пространстве удовлетворяет подобному же тождеству

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0 \qquad (I)$$

и это совсем не случайно.

Определение. *Алгеброй Ли называется линейное пространство L, вместе с билинейной кососимметрической операцией $L\times L\to L$, удовлетворяющей тождеству Якоби (I).*

Операция обычно обозначается квадратными скобками и называется *коммутатором*.

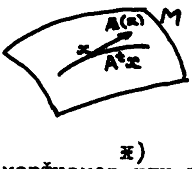
Мы можем теперь сказать, что множество всех бесконечно-дифференцируемых функций на каноническом многообразии является алгеброй Ли.

Задача. Докажите, что множество первых интегралов данного фазового потока g_H^t есть подалгебра алгебры Ли всех функций.

Оставим теперь на время каноническую структуру и обратимся к векторным полям на произвольном многообразии.

Алгебра Ли векторных полей.

Пусть M – гладкое многообразие, A – гладкое векторное поле на M : в каждой точке $x\in M$ задан касательный вектор $A(x)\in TM_x$. С каждым таким векторным полем A связаны следующие два объекта.



I. *Однопараметрическая группа диффеоморфизмов*[ж)] *или поток*

ж) По теореме существования, единственности и дифференцируемости теории обыкновенных уравнений группа A^t определена, во всяком случае, для компактного M.

$A^t: M \to M$, для которого $\mathbb{A}$ есть поле скоростей:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A^t x = \mathbb{A}(x)$$

Траектории потока $A^t x$ называются <u>интегральнымик кривыми</u> поля $\mathbb{A}$.

2. <u>Дифференциальный оператор первого порядка</u> $\theta_{\mathbb{A}}$. Речь идет о дифференцировании функций по направлению поля $\mathbb{A}$: для всякой функции $\varphi: M \to \mathbb{R}^1$ производная по направлению $\mathbb{A}$ есть новая функция, значение которой в точке x есть

$$(\theta_{\mathbb{A}}\varphi)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(A^t x)$$

<u>Задача</u>. Докажите, что оператор $\theta_{\mathbb{A}}$ линейный:

$\theta_{\mathbb{A}}(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\theta_{\mathbb{A}}\varphi_1 + \lambda_2\theta_{\mathbb{A}}\varphi_2 \ (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1)$

Докажите формулу Лейбница $\theta_{\mathbb{A}}(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1\theta_{\mathbb{A}}\varphi_2 + \varphi_2\theta_{\mathbb{A}}\varphi_1$

<u>Пример</u>. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – локальные координаты на M . В этой системе координат вектор $\mathbb{A}$ задается компонентами $A_1(x), \ldots, A_n(x)$; поток A^t задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = A_1(x), \ldots, \dot{x}_n = A_n(x)$$

и, следовательно, производная $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ по направлению $\mathbb{A}$ есть

$$\theta_{\mathbb{A}}\varphi = A_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$$

Можно сказать, что оператор $\theta_{\mathbb{A}}$ в координатах $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$\theta_{\mathbb{A}} = A_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

6^x-1427

а это и есть общий вид линейного дифференциального оператора первого порядка в координатном пространстве.

Задача. Докажите, что соответствие между векторными полями $\mathbb{A}$, потоками A^t и дифференцированиями $\theta_{\mathbb{A}}$ взаимно-однозначно.

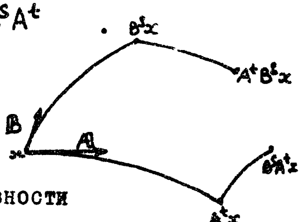
Замечание. Дифференцирования $\theta_{\mathbb{A}}$ образуют линейное пространство, изоморфное пространству векторных полей. Поэтому теорию гладких многообразий можно строить, начиная с дифференцировании $\theta_{\mathbb{A}}$ (определяя их аксиоматически, как линейные операторы, удовлетворяющие формуле Лейбница). Мы не будем здесь следовать такому построению, принятому в большинстве современных учебников.

Пусть теперь на многообразии M даны два векторных поля, $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$. Соответствующие потоки, A^t и B^s вообще говоря, не коммутируют: $A^t B^s \neq B^s A^t$.

Задача. Привести пример.

Решение. Поля $\mathbb{A} = e_1$,

$\mathbb{B} = x_1 e_2$ на плоскости x_1, x_2.



Для измерения степени некоммутативности двух потоков A^t, B^s рассмотрим точки $A^t B^s x$ и $B^s A^t x$. Чтобы оценить различие между этими точками, сравним значения в них какой-нибудь гладкой функции φ, заданной на многообразии M. Разность

$$\Delta(t, s; x) = \varphi(A^t B^s x) - \varphi(B^s A^t x)$$

есть, очевидно, дифференцируемая функция, обращающаяся в 0 при $s=0$ и при $t=0$. Поэтому первый отличный от 0 член ряда Тейлора Δ по t, s в 0 содержит st, а другие члены второй степени исчезают. Сосчитаем этот главный билинейный член Δ в 0.

ЛЕММА I. Смешанная производная Δ по t, s в 0 равна коммутатору дифференцирований по направлениям $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} \varphi(A^t B^s x) - \varphi(B^s A^t x) = (\theta_B \theta_A \varphi - \theta_A \theta_B \varphi)(x)$$

Доказательство. По определению $D_{\mathbb{A}}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \varphi(A^t B^s x) = (\theta_{\mathbb{A}} \varphi)(B^s x)$$

Если обозначить функцию $D_{\mathbb{A}}\varphi$ через ψ, то по определению $D_{\mathbb{B}}$,

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \psi(B^s x) = (\theta_{\mathbb{B}} \psi)(x)$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} \varphi(A^t B^s x) = (\theta_{\mathbb{B}} \theta_{\mathbb{A}} \varphi)(x)$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь возникший коммутатор дифференцирований $\theta_{\mathbb{B}}\theta_{\mathbb{A}} - \theta_{\mathbb{A}}\theta_{\mathbb{B}}$.

На первый взгляд это - дифференциальный оператор второго порядка.

ЛЕММА 2. Оператор $\theta_{\mathbf{B}}\theta_{\mathbf{A}} - \theta_{\mathbf{A}}\theta_{\mathbf{B}}$ есть линейный дифференциальный оператор первого порядка.

Доказательство. Пусть $A_1,\dots,A_n, B_1,\dots,B_n$ – компоненты полей $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ в локальной системе координат $x_1,\dots,x_n$ на M. Тогда

$$\theta_{\mathbf{B}}\theta_{\mathbf{A}}\varphi = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi + \sum_{i,j=1}^{n} B_i A_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Если вычесть $\theta_{\mathbf{A}}\theta_{\mathbf{B}}\varphi$, слагаемое со вторыми производными φ и пропадет, и мы получим

$$(\theta_{\mathbf{B}}\theta_{\mathbf{A}} - \theta_{\mathbf{A}}\theta_{\mathbf{B}})\varphi = \sum_{i,j=1}^{n}\left(B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

Итак, лемма доказана.

Но поскольку каждый линейный дифференциальный оператор первого порядка задается векторным полем, наш оператор $\theta_{\mathbf{B}}\theta_{\mathbf{A}} - \theta_{\mathbf{A}}\theta_{\mathbf{B}}$ также соответствует некоторому векторному полю $\mathbf{C}$.

Определение. Скобкой Пуассона или коммутатором двух векторных полей $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ на многообразии M называется[ж)] векторное поле $\mathbf{C}$, для которого

$$\theta_{\mathbf{C}} = \theta_{\mathbf{B}}\theta_{\mathbf{A}} - \theta_{\mathbf{A}}\theta_{\mathbf{B}}$$

Скобка пуассона двух векторных полей обозначается

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$$

ж) Во многих книгах принимается другой знак.

Задача. Пусть поля $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ заданы в координатах x_i компонентами A_i, B_i. Найти компоненты их скобки Пуассона.

Решение. При доказательстве леммы 2 уже доказана формула

$$[\mathbb{A},\mathbb{B}]_j = \sum_i B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i}$$

Задача. Пусть $\mathbb{A}$ – векторное поле линейных скоростей твердого тела, вращающегося с угловой скоростью ω_1, $\mathbb{B}$ – с угловой скоростью ω_2 вокруг точки 0. Найти $[\mathbb{A},\mathbb{B}]$.

ТЕОРЕМА. Скобка Пуассона превращает линейное пространство векторных полей на многообразии M в алгебру Ли.

Доказательство. Линейность и кососимметричность скобки Пуассона очевидна. Докажем тождество Якоби. Имеем по определению скобки Пуассона

$$\theta_{[[\mathbb{A},\mathbb{B}],\mathbb{C}]} = \theta_{\mathbb{C}}\theta_{[\mathbb{A},\mathbb{B}]} - \theta_{[\mathbb{A},\mathbb{B}]}\theta_{\mathbb{C}} = \theta_{\mathbb{C}}\theta_{\mathbb{B}}\theta_{\mathbb{A}} - \theta_{\mathbb{C}}\theta_{\mathbb{A}}\theta_{\mathbb{B}} - \theta_{\mathbb{B}}\theta_{\mathbb{C}}\theta_{\mathbb{A}} + \theta_{\mathbb{A}}\theta_{\mathbb{B}}\theta_{\mathbb{C}}$$

Всего в сумме $\theta_{[[\mathbb{A},\mathbb{B}],\mathbb{C}]} + \theta_{[[\mathbb{C},\mathbb{A}],\mathbb{B}]} + \theta_{[[\mathbb{B},\mathbb{C}],\mathbb{A}]}$ будет 12 слагаемых. Легко проверить, что каждое слагаемое войдет в сумму дважды, с противоположными знаками; это доказывает теорему.

Теперь легко доказать тождество Якоби для скобок Пуассона функций на каноническом многообразии (M^{2n},ω):

$$(H_1(H_2,H_3)) + (H_2,(H_3,H_1)) + (H_3,(H_1,H_2)) = 0$$

Действительно, написанная сумма есть, очевидно, линейная однородная функция относительно вторых частных производных функций H. Сосчитаем члены, содержащие вторые частные производные H_1

$$(H_2,(H_3,H_1))+(H_3,(H_1,H_2))=(\theta_{\xi_2}\theta_{\xi_3}-\theta_{\xi_3}\theta_{\xi_2})H_1$$

где θ_ξ – дифференцирование по направлению ξ, а ξ_2, ξ_3 – поля скоростей фазовых потоков с функциями Гамильтона H_2, H_3.

Но по лемме 2 прошлой лекции $\theta_{\xi_2}\theta_{\xi_3}-\theta_{\xi_3}\theta_{\xi_2}$ есть дифференциальный оператор первого порядка. Итак, никаких вторых производных H_1 (а значит H_2 и H_3) наша сумма не содержит. Поэтому наша сумма равна 0, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть ξ_1, ξ_2 – поля скоростей фазовых потоков с функциями Гамильтона H_1 и H_2. Рассмотрим скобку Пуассона векторных полей $[\xi_1, \xi_2]$. Это векторное поле есть поле скоростей фазового потока, функция Гамильтона которого равна минус скобке Пуассона функций Гамильтона (H_1, H_2).

Доказательство. Тождество Якоби можно переписать в виде

$$((H_1,H_2),H_3)=(H_1(H_2,H_3))-(H_2(H_1,H_3))$$

$$\theta_{\xi(H_1,H_2)}=\theta_{\xi_1}\theta_{\xi_2}-\theta_{\xi_2}\theta_{\xi_1}$$

$$\theta_{\xi(H_1,H_2)}=\theta_{[\xi_2,\xi_1]} \quad \text{ч. т. д.}$$

Вернемся теперь к векторным полям на произвольном многообразии M.

ТЕОРЕМА. Два потока A^t, B^s коммутируют тогда и только тогда, когда скобка Пуассона соответствующих векторных полей $[A,B]$ равна 0.

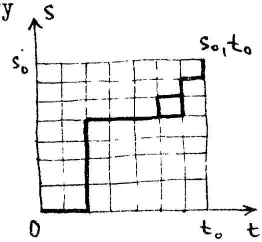
<u>Доказательство</u>. Если $A^tB^s = B^sA^t$, то по лемме I $[A,B]=0$. Если $[A,B]=0$, то по лемме I, для любой функции φ в любой точке x

$$\varphi(A^tB^sx)-\varphi(B^sA^tx) = o(|s|^2,|t|^2) \qquad s\to 0,\ t\to 0 \qquad (2)$$

мы покажем, что отсюда вытекает $\varphi(A^tB^sx) \equiv \varphi(B^sA^tx)$ при достаточно малых s и t.

Применяя это соотношение к локальным координатам $(\varphi = x_1,\dots,x_n)$, получим $A^tB^s \equiv B^sA^t$.

Рассмотрим прямоугольник $0 \le t \le t_0$, $0 \le s \le s_0$ на плоскости t,s. Каждому пути, ведущему из $0,0$ в t_0,s_0 и состоящему из конечного числа отрезков координатных направлений сопоставим произведение преобразований потоков A^t и B^s. Каждому отрезку $t_1 \le t \le t_2$ сопоставим $A^{t_2-t_1}$, отрезку $s_1 \le s \le s_2$ – $B^{s_2-s_1}$, применять преобразования будем в порядке, в каком идут отрезки от $0,0$.

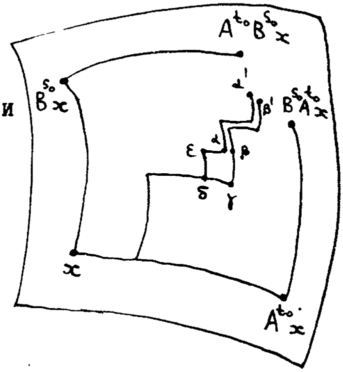


Так, например, сторонам $0 \le t \le t_0$, $s=0$ и $t=t_0$, $0 \le s \le s_0$ отвечает произведение $B^{s_0}A^{t_0}$, а сторонам $t=0$, $0 \le s \le s_0$ и $s=s_0$, $0 \le t \le t_0$ – произведение $A^{t_0}B^{s_0}$.

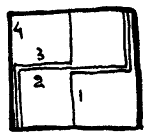
Кроме того, мы сопоставим каждому такому пути на плоскости t,s путь на многообразии M, выходящий из точки x, составленный из траекторий потоков A^t и B^s, если пути на плоскости t, s соответствует преобразование $A^{t_1}B^{s_1} \dots A^{t_n}B^{s_n}$, то на многообразии M соответствующии путь заканчивается в точке $A^{t_1}B^{s_1} \dots A^{t_n}B^{s_n}x$.

Наша цель - доказать, что все эти пути в действительности заканчиваются в одной точке

$A^{t_0}B^{s_0}x = B^{s_0}A^{t_0}x$.



Разобьем отрезки $0 \le t \le t_0$ и $0 \le s \le s_0$ на $\mathcal{N}$ равных частей, так, что весь прямоугольник разделится на $\mathcal{N}^2$ маленьких прямоугольников. Переход от сторон $0 - t_0 - s_0, t_0$ к сторонам $0 - s_0 - s_0, t_0$ можно совершить в $\mathcal{N}^2$ шагов, в каждом из которых пара соседних сторон маленького прямоугольника заменяется другой парой.



$N=2$

На многообразии M этому маленькому прямоугольнику соответствует вообще говоря, незамкнутый криволинейный четырехугольник $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$. Рассмотрим расстояние[ж)] между его вершинами α, β, соответствующими наиоольшим значениям t и s. Как мы видели выше $((2), x = \delta)$, $\rho(\alpha, \beta) \le C_1 \mathcal{N}^{-3}$ (где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от $\mathcal{N}$). Используя теорему дифференцируемости решении дифференциальных уравнений

ж) В какой-нибудь римановой метрике M.

по начальным данным, отсюда нетрудно вывести оценку расстояния между концами α', β' путей $x\delta\varepsilon_{\alpha\alpha'}$ и $x\delta\varepsilon_{\beta\beta'}$ на многообразии M: $\rho(\alpha',\beta') < C_2 N^{-3}$, где постоянная $C_2 > 0$ снова не зависит от N. Но весь переход от $B^{s_0}A^{t_0}x$ к $A^{t_0}B^{s_0}x$ мы разбили на N^2 таких шагов. Итак, $\rho(A^{t_0}B^{s_0}x, B^{s_0}A^{t_0}x) \leq$ $\leq \frac{C_2 N^2}{N^3}\ \forall N$. Следовательно, $A^{t_0}B^{s_0}x = B^{s_0}A^{t_0}x$ и.т.д.

Соединяя доказанную теорему со следствием из тождества Якоби (стр. 12), получаем

Следствие. Для того, чтобы фазовые потоки с функциями Гамильтона H_1 и H_2 коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы скобка Пуассона функций H_1, H_2 была константой.

Это - еще одно обобщение теоремы Э.Нетер: зная поток, коммутирующий с исследуемым, можно построить первый интеграл.

Добавление. Алгебра Ли группы Ли.

Группой Ли называется группа G, являющаяся дифференцируемым многообразием, причем операции (умножение и обращение) - дифференцируемые отображения $G\times G \to G$, $G \to G$.

Касательное пространство к группе Ли G в единице e TG_e имеет естественную структуру алгебры Ли; она определяется следующим образом.

Каждому касательному вектору $A \in TG_e$ отвечает однопараметрическая подгруппа $A^t \in G$ с вектором скорости $A = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} A^t$. Степень некоммутативности двух подгрупп A^t, B^s измеряется произведением $A^t B^s A^{-t} B^{-s}$. Оказывается, существует одна единственная подгруппа C^τ, для которой

$$\rho(A^t B^s A^{-t} B^{-s}, C^{st}) = o(s^2, t^2)$$

Соответствующий вектор $\mathbf{C} = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} C^\tau$ называется <u>коммутатором Ли</u> $\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Можно проверить, что введенная таким образом в касательное пространство TG_e операция коммутирования превращает его в алгебру Ли (т.е. операция билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби). Эта алгебра называется алгеброй Ли группы Ли G.

<u>Задача.</u> Вычислить операцию коммутирования в алгебре Ли группы $SO(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства.

Лемма I показывает, что <u>скобку Пуассона векторных полей можно определять как коммутатор Ли для "бесконечномерной группы Ли" всех диффеоморфизмов многообразия.</u>[ж)] M

С другой стороны, коммутатор Ли можно определять с помощью скобок Пуассона векторных полей на группе Ли G. Пусть $g \in G$. <u>Правым сдвигом</u> R_g называется отображение $R_g : G \to G$, $R_g h = hg$. Дифференциал R_g в точке g отображает TG_e в TG_g. Таким образом, каждому вектору $\mathbf{A} \in TG_e$ соответствует целое векторное поле на группе: оно составлено из всех правых сдвигов $(dR_g)\mathbf{A}$ и называется правоинвариантным полем. Очевидно, правоинвари-

---

ж) Знак в определении скобки Пуассона векторных полей выбран исходя из этого соображения.

антное векторное поле на группе задается однозначно своим значением в единице A .

Задача. Докажите, что скобка Пуассона правовариантных полей на группе Ли G есть правоинвариантное поле, а значение его в единице есть коммутатор Ли значений исходных полей в единице.

ЛЕКЦИЯ 39

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Чтобы проинтегрировать систему n обыкновенных дифференциальных уравнений, нужно знать n первых интегралов. Оказывается, если дана каноническая система $2n$ дифференциальных уравнений, то во многих случаях достаточно знать лишь n первых интегралов - каждый из них позволяет понизить порядок системы не на одну, а на две единицы.

Напомню, что функция F является первым интегралом системы с функцией Гамильтона H тогда и только тогда, когда скобка Пуассона

$$(H,F) \equiv 0$$

тождественно равна 0.

Определение. Две функции F_1, F_2 на каноническом многообразии находятся в инволюции, если их скобка Пуассона равна 0.

Лиувилль доказал, что если в системе с n степенями свободы (т.е. $2n$ -мерным фазовым пространством) известны n независимых первых интегралов в инволюции, то система интегрируема в квадратах.

Вот точная формулировка этой теоремы.

Предположим, что на каноническом $2n$ -мерном многообразии даны n функций в инволюции

$$H = F_1, \ldots, F_n \quad ; \quad (F_i ; F_j) \equiv 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Рассмотрим множество уровня функций F_i

$$M_f = \{x: F_i(x) = f_i, i = 1, \ldots, n\}$$

Предположим, что на M_f n функций F_i независимы (т.е. n I-форм dF_i линейно-независимы в каждой точке M_f).

Тогда

1) M_f - гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока с функцией Гамильтона H .

2) Если многообразие M_f компактно, то оно диффеоморфно n -мерному тору

$$T^n = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mod 2\pi\}$$

3) Фазовый поток с функцией Гамильтона H определяет на M_f условно-периодическое движение, т.е. в угловых координатах $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \qquad \omega = \omega(f)$$

4) Канонические уравнения с функцией Гамильтона H интегрируются в квадратурах.

Прежде, чем доказывать эту теорему, отметим некоторые из ее следствий.

Следствие I. Если в канонической системе с двумя степенями свободы известен один первый интеграл F , не зависящий от функции Гамильтона H, то система интегрируема в квадратурах; компактное двумерное подмногообразие фазового пространства $H = h$, $F = f$ есть инвариантный тор, а движение на нем условно-периодично.

Действительно, F и H находятся в инволюции, так как F первый интеграл системы с функцией Гамильтона H

В качестве примера с 3 степенями свободы рассмотрим Лагранжев тяжелый симметричный волчок, закрепленный в точке на оси. Здесь сразу видны 3 первых интеграла H, M_z, M_3. Легко проверить, что интегралы M_z и M_3 находятся в инволюции. Далее, многообразие $H = h$ в фазовом пространстве компактно. Поэтому мы без всяких вычислений, сразу можем сказать, что при большинстве начальных условий[ж)] движение волчка условно-периодично: фазовые траектории заполняют трехмерные торы $H = C_1$, $M_z = C_2$, $M_3 = C_3$. Соответствующие 3 частоты называются частотами собственного вращения, прецессии и нутации.

Другие примеры получаются из следующего замечания: Если каноническая система интегрируется методом Якоби-Гамильтона, то она имеет n первых интегралов в инволюции.

Действительно, метод состоит в каноническом преобразовании $p, q \to P, Q$, таком, что P_i – первые интегралы. Но импульсы P_i очевидно находятся в инволюции

ж) исключение составляют особые множества уровня интегралов, где нарушается их независимость.

(см. стр. 37.2).

В частности, сказанное применимо к задаче о притяжении двумя неподвижными центрами. Число примеров легко умножить; фактически сформулированная выше теорема Лиувилля охватывает все проинтегрированные на сегодняшний день проолемы динамики.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим множество уровня интегралов

$$M_f = \{x : F_i = f_i, \ i = 1, \dots, n\}$$

По условию n I-форм dF_i линейно-независимы в каждой точке M_f. Следовательно, по теореме о неявной функции, M_f есть n -мерное подмногообразие $2n$ -мерного фазового пространства.

ЛЕММА I. На n -мерном многообразии M_f существуют n касательных векторных полей, попарно коммутирующих и линейно-независимых в каждой точке.

Доказательство. Каноническая структура фазового пространства определяет оператор I, переводящий 1-формы в векторные поля. Этот оператор I переводит 1-форму dF_i в 1-поле IdF_i фазовой скорости системы с функцией Гамильтона F_i. Покажем, что n полей IdF_i касаются M_f, коммутируют и независимы.

Действительно, из независимости dF_i и невырожденности изоморфизма I следует независимость IdF_i в каждой точке M_f. Поля IdF_i попарно коммутируют, так как скобки Пуассона их функций Гамильтона $(F_i, F_j) = 0$ (см. лекцию 37). По той же причине производная функции F_i по направлению поля $I dF_j$ равна 0 для любых $i, j = 1, \ldots, n$. Значит поля $I dF_i$ касаются M_f, и лемма I доказана.

Заметим, что доказано даже больше:

I') Многообразие M_f инвариантно относительно каждого из n коммутирующих фазовых потоков g_i^t с функциями Гамильтона $F_1, \ldots, F_n$: $g_i^t g_j^s = g_j^s g_i^t$.

I") Многообразие M_f – нулевое (т.е. 2-форма ω^2 обращается в 0 на $T(M_f)_x$). Действительно, n векторов $I dF_i$ попарно косоортогональны, $(F_i, F_j) = 0$, и образуют базис в касательной плоскости к многообразию M_f в точке x.

Теперь мы воспользуемся известным топологическим предложением.

ЛЕММА 2. Пусть M^n - компактное связное дифференцируемое многообразие, на котором задано n векторных полей, попарно коммутирующих и линейно-независимых в каждой точке M^n. Тогда многообразие M^n диффеоморфно*) n - мерному тору.

Доказательство леммы 2. Обозначим через g_i^t, $i = 1, \ldots, n$ однопараметрические группы диффеоморфизмов M, соответствующие заданным n векторным полям. Поскольку поля коммутируют, группы g_i^t, g_j^s коммутируют. Поэтому мы можем определить действие g коммутативной группы" $\mathbb{R}^n = \{t\}$ на многообразии M, полагая

$$g^t : M \to M, \quad g^t = g_1^{t_1} \cdots g_n^{t_n} \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

---

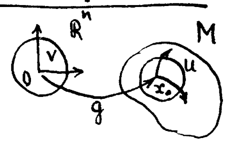
*) диффеоморфизм взаимно однозначное и взаимно дифференцируемое отображение.

Очевидно, $g^{t+s} = g^t g^s \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем точку $x_0 \in M$. Тогда возникает отображение

$$g: \mathbb{R}^n \to M, \quad g(t) = g^t x_0$$

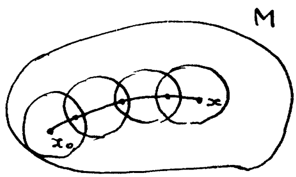
(точку x_0 надо сдвинуть на время t_1, по траектории первого потока, t_2 - второго, и т.д.)

<u>Задача</u>. Докажите, что <u>построенное отображение g достаточно малой окрестности 0, $V \subset \mathbb{R}^n$ задает карту окрестности точки x_0: у каждой точки $x_0 \in M$ существует такая окрестность U, $x_0 \in U \subset M$, что g отображает V на U диффеоморфно</u>*).



<u>Указание</u>. Применить теорему о неявной функции и воспользоваться линейной независимостью полей в точке x_0.

<u>Задача</u>. <u>Докажите, что $g: \mathbb{R}^n \to M$ есть отображение на</u>



<u>Указание</u>. Соедините точку $x \in M$ с x_0 кривой, покройте кривую конечным числом окрестностей U предыдущей задачи и определите t как сумму сдвигов t_i, соответствующих кускам кривоиг

.Заметим, что отображение $g: \mathbb{R}^n \to M^n$ не может быть взаимно-однозначным, так как M^n компактно, а $\mathbb{R}^n$

---

*) диффеоморфизм = взаимно однозначное и взаимно дифференцируемое отображение.

7-1127

нет. Изучим множество прообразов точки $x_0 \in M^n$.

Определение. Стационарной группой точки x_0 называется множество Γ точек $t \in \mathbb{R}^n$, для которых $g^t x_0 = x_0$.

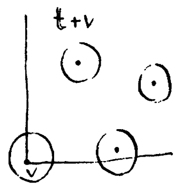
Задача. Докажите, что Γ есть подгруппа $\mathbb{R}^n$, не зависящая притом от точки x_0 .

Решение. Если $g^t x_0 = x_0$, $g^s x_0 = x_0$, то $g^{s+t} x_0 = g^s g^t x_0 = g^s x_0 = x_0$, $g^{-t} x_0 = g^{-t} g^t x_0 = x_0$.
Поэтому Γ -подгруппа $\mathbb{R}^n$. Если $x = g^\tau x_0$, $t \in \Gamma$, то $g^t x = g^{t+\tau} x_0 = g^\tau g^t x_0 = g^\tau x_0 = x$, ч.т.д.

Таким образом, стационарная группа Γ есть вполне определенная, не зависящая от точки x_0 подгруппа группы $\mathbb{R}^n$. В частности, точка $t = 0$ очевидно, принадлежит Γ .

Задача. Докажите, что в достаточно малой окрестности V точки $t = 0$ в $\mathbb{R}^n$ нет других точек стационарной группы Γ , кроме точки $t = 0$.

Указание. Отображение $g: V \to U$ диффеоморфно.

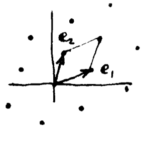


Задача. Докажите, что в окрестности $t + V$ любой точки $t \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ нет точек стационарной группы Γ , отличных от точки t .

Таким образом, точки стационарной подгруппы Γ лежат в $\mathbb{R}^n$ дискретно, Такие подгруппы называются дискретными подгруппами.

Пример. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ k - линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$, $0 \le k \le n$. Множество всех их целочисленных линейных комбинаций

$$m_1 e_1 + \dots + m_k e_k, \quad m_i \in \mathbb{Z} = (\dots -2, -1, 0, 1, \dots)$$

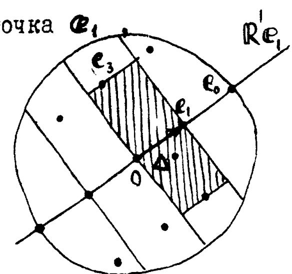


образует дискретную подгруппу $\mathbb{R}^n$. Например, множество всех целых точек на плоскости есть дискретная подгруппа плоскости.

Мы воспользуемся теперь известным алгеораическим фактом: приведенным примером исчерпываются все дискретные подгруппы $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 3. Пусть Γ - дискретная подгруппа группы $\mathbb{R}^n$. Тогда существуют k $(0 \le k \le n)$ линейно-независимых векторов $e_1, \dots, e_k \in \Gamma$, таких, что Γ есть в точности множество всех их целочисленных линейных комбинаций.

Доказательство леммы 3. Будем рассматривать в $\mathbb{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру. Имеем всегда $0 \in \Gamma$. Если $\Gamma = 0$, лемма доказана. Если нет, существует точка $e_0 \in \Gamma$, $e_0 \neq 0$. Рассмотрим прямую $\mathbb{R}^1 e$. Покажем, что на этой прямой существует точка e_1, ближайшая к 0. Действительно, в шаре радиуса $|e|$ с центром в 0, лишь конечное число точек Γ (у каждой точки Γ, как мы видели выше, есть окрестность стандартной величины V, не содержащая других точек Γ).



Ближайшая к 0 из конечного числа точек этого шара, лежащих на прямой $\mathbb{R}^1 e$, будет ближайшей на всей прямой.

На прямой $\mathbb{R}^1 e$ группе Γ принадлежат целые кратные e_1 (me_1, $m \in \mathbb{Z}$) и только они. Действительно, точки me_1 делят прямую на части длины $|e_1|$. Если бы внутри одной из этих частей $(me_1, (m+1)e_1)$ была точка $e \in \Gamma$, то точка $e - me_1 \in \Gamma$ была бы ближе e_1 к 0.

Если у Γ нет точек вне прямой $\mathbb{R}^1 e_1$ лемма доказана. Пусть существует точка $e \in \Gamma$, $e \notin \mathbb{R}^1 e_1$. Покажем, что существует точка $e_2 \in \Gamma$, ближайшая к прямой $\mathbb{R}^1 e_1$ (сама не лежащая на прямой). Спроектируем e ортогонально на прямую $\mathbb{R}^1 e_1$. Проекция лежит ровно в одном отрезке $\Delta = \{\lambda e_1\}$, $m \leq \lambda \leq m+1$. Рассмотрим прямой круговой цилиндр Ц с осью Δ и радиусом равным расстоянию от Δ до e. В этом цилиндре конечное (ненулевое) число точек Γ.

Пусть e_2 -ближайшая из них к оси $\mathbb{R}^1 e_1$, не лежащая на оси.

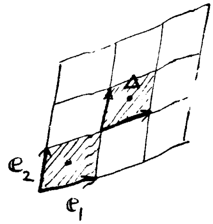
<u>Задача</u>. <u>Докажите, что расстояние от любой точки группы Γ, не лежащей на оси $\mathbb{R}^1 e_1$ до этой оси не меньше, чем расстояние от точки e_2 до оси $\mathbb{R}^1 e_1$.</u>

<u>Указание</u>. Сдвигом на me_1 можно загнать проекцию на ось в отрезок Δ.

Целочисленные линейные комбинации e_1 и e_2 образуют решетку в плоскости $\mathbb{R}^1 e_1+\mathbb{R}^1 e_2$.

Задача. Докажите, что никаких других точек подгруппы Γ кроме целочисленных линейных комбинаций e_1 и e_2 , на плоскости $\mathbb{R}^1 e_1+\mathbb{R}^1 e_2$ нет.

Указание. Разделите плоскость на параллелограммы $\Delta=\{\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2\}$, $m_i\le\lambda_i<m_i+1$. Если бы $e\in\Delta$, $e\neq m_1 e_1+m_2 e_2$, то точка $e-m_1 e_1-m_2 e_2$ была бы ближе к $\mathbb{R}^1 e_1$, чем e_2 .



Если у Γ нет точек вне плоскости $\mathbb{R}^1 e_1+\mathbb{R}^1 e_2$, лемма доказана. Пусть существует точка $e\in\Gamma$ вне этой плоскости. Тогда существует ближайшая к плоскости $\mathbb{R}^1 e_1+\mathbb{R}^1 e_2$ точка $e_3\in\Gamma$; точки $m_1 e_1+m_2 e_2+m_3 e_3$ исчерпывают Γ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^1 e_1+\mathbb{R}^1 e_2+\mathbb{R}^1 e_3$. Если Γ этим не исчерпана, берем ближайшую точку к этому трехмерному пространству, и т.д.

Задача. Докажите, что ближайшая точка каждый раз существует.

Указание. Взять ближайшую из конечного числа точек соответствующего "цилиндра" $Ц$.

Заметим, что все получаемые вектора $e_1, e_2, e_3, \ldots$ линейно независимы. Поскольку все они принадлежат $\mathbb{R}^n$, число их k не больше n .

Задача. Покажите, что Γ исчерпывается целочисленными линейными комбинациями $e_1, \ldots, e_k$.

Указание. Если есть $e\in\Gamma$ вне плоскости $\mathbb{R}^1 e_1+\ldots+\mathbb{R}^1 e_k$

построение не окончено.

Плоскость $\mathbb{R}^1 e_1 + \ldots + \mathbb{R}^1 e_k$ разбить на параллелипипеды Δ и показать, что ни в одном Δ не может быть точек Γ.

Итак, лемма 3 доказана.

Теперь нетрудно доказать лемму 2: M_f диффеоморфно T^n.

Рассмотрим прямое произведение k окружностей и $n-k$ прямых

$$T^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, y_1, \ldots, y_{n-k}\} \qquad \varphi \bmod 2\pi$$

вместе с естественным отображением $p: \mathbb{R}^n \to T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$

$$\varphi, y \to \varphi \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), y$$

Точки $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{R}^n$ (f_i имеет координаты $\varphi_i = 2T_i$, $\varphi_j = 0$, $y = 0$) переходят при этом отображении в 0.

Пусть $e_1, \ldots, e_k \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ - образующие стационарной группы Γ, (см. лемму 3). Отобразим линейное пространство $\mathbb{R}^n = \{(\varphi, y)\}$ на пространство $\mathbb{R}^n = \{t\}$ так, чтобы вектора f_i перешли в e_i. Пусть $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой изоморфизм.

Заметим теперь, что $\mathbb{R}^n = \{(\varphi, y)\}$ задает карты $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, а $\mathbb{R}^n = \{t\}$ - карта нашего многообразия M_{f_i}.

<u>Задача</u>. Докажите, что отображение карт $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задает диффеоморфизм $\widetilde{A}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n = \{(\varphi, y)\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n = \{t\} \\ \downarrow p & & \downarrow g \\ T^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\widetilde{A}} & M_f \end{array}$$

Но так как многообразие M_f по условию компактно, $k=n$ и M_f есть n-мерный тор. Лемма 2 доказана. Ввиду леммы I, доказаны первые два утверждения теоремы.

Одновременно мы построили на M_f угловые координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mod 2\pi$.

Задача. Показать, что под действием фазового потока с функцией Гамильтона H угловые координаты φ меняются равномерно:

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i, \quad \omega_i = \omega_i(f) = \text{const}, \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$$

Иными словами, движение на инвариантном торе M_f условно-периодическое.

Указание. $\varphi = A^{-1}\ell$

Из всех утверждений теоремы осталось доказать лишь последнее: что система интегрируется в квадратурах.

ЛЕКЦИЯ 40

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ

В лекции 39 мы занимались исследованием одного единственного многообразия уровня интегралов $M_f: \mathcal{F}(x)=f$; оказалось, что M_f есть n -мерный тор, инвариантныи относительно фазового потока. Мы выбрали угловые координаты φ_i на M_f так, что фазовый поток с функцией Гамильтона $H=F_1$ принимает на M_f особенно простой вид:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega(f)\quad,\quad \varphi(t)=\varphi(0)+\omega t$$

Рассмотрим теперь окрестность n -мерного многообразия M_f в $2n$ мерном фазовом пространстве.

Задача. Докажите, что многообразие M_f имеет окрестность, диффеоморфную прямому произведению n -мерного тора T^n на шар D^n n-мерного евклидова пространства.

Указание. Принять за координаты функции F_i и построенные выше углы φ_i. Ввиду линейной независимость dF_i на M_f, F_i и φ_i $(i=1,\dots,n)$ задают диффеоморфизм окрестности M_f на прямое произведение $T^n\times D^n$.

Во введенных координатах F,φ фазовый поток с функцией Гамильтона $H=F_1$ записывается в виде особенно простой системы $2n$ обыкновенных дифференциальный уравнений

$$\frac{dF}{dt}=0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(F) \qquad (I)$$

которая немедленно интегрируется: $\mathbb{F}(t)=\mathbb{F}(0),\ \varphi(t)+\omega(\mathbb{F}(0))t$

Таким образом, чтобы явно проинтегрировать исходную каноническую систему дифференциальных уравнений, достаточно в явном виде найти переменные φ. Оказывается, это можно сделать, используя лишь квадратуры.
Такое построение переменных φ приведено ниже.

Заметим, что переменные $\mathbb{F},\varphi$ не являются, вообще говоря, каноническими координатами. Оказывается, существуют некоторые функции от $\mathbb{F}$, мы обозначим их $\mathbb{I}=\mathbb{I}(\mathbb{F})$, $\mathbb{I}=I_1,\dots,I_n$, такие, что переменные $\mathbb{I},\varphi$ уже являются каноническими координатами: исходная каноническая структура ω^2 выражается через них по обычной формуле $\omega^2=\sum dI_i\wedge d\varphi_i$.

Переменные $\mathbb{I}$ называются переменными действия[ж)] и вместе с угловыми переменными φ они образуют в окрестности многообразия M_{ξ} систему канонических координат "действие-угол".

Величины $\mathbb{I}$ являются первыми интегралами системы с функцией Гамильтона $H=F_1$, как функции от первых интегралов $\mathbb{F}$. В свою очередь, переменные $\mathbb{F}$ можно выразить через $\mathbb{I}$, и, в частности, $F_1=H=H(\mathbb{I})$. В переменных действие - угол дифференциальные уравнения нашего потока (I) имеют вид

$$\frac{d\mathbb{I}}{dt}=0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(\mathbb{I}) \qquad (2)$$

ж) Нетрудно сообразить, что $\mathbb{I}$ имеет размерность действия.

Задача. Может ли функция $\omega(I)$ в (2) быть произвольной?

Решение. В переменных I, φ уравнения потока (2) имеют канонический вид, с функцией Гамильтона $H(I)$. Следовательно, $\omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I}$; поэтому, если число степеней свободы $n \geq 2$, функции $\omega(I)$ не произвольны, а удовлетворяют условию симметрии $\frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial I_i}$.

Переменные действие-угол особенно важны для теории возмущений ; я укажу в лекции 42 их применение в теории адиабатических инвариантов.

Перейдем к построению переменных действие-угол. Начнем с системы с одной степенью свободы, заданной на фазовой плоскости p, q функцией Гамильтона $H(p,q)$.

Пример 1. Гармонический осциллятор, $H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2$ или общее $H = \frac{a^2 p^2}{2} + \frac{b^2 q^2}{2}$.

Пример 2. Математический маятник, $H = \frac{1}{2} p^2 - \cos q$.

В обоих случаях имеются компактные замкнутые кривые $M_h : H = h$, и мы находимся в условиях теоремы лекции 39, при $n = 1$.

Чтобы построить переменные действие-угол, будем искать каноническое преобразование $p, q \to I, \varphi$, удовлетворяющее двум условиям.

1) $I = I(h)$ 2) $\oint_{M_h} d\varphi = 2\pi$

Задача. Найти переменные действие-угол в случае простейшего гармонического осциллятора $H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$.

Решение. Если r, φ – полярные координаты, то $dp \wedge dq = r\,dr \wedge d\varphi = d\frac{r^2}{2} \wedge d\varphi$. Поэтому $I = H = \frac{p^2+q^2}{2}$.

Чтобы построить каноническое преобразование $p, q \to I, \varphi$ в общем случае, будем искать его производящую функцию $S(I,q)$:

$$p = \frac{\partial S(I,q)}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S(I,q)}{\partial I}, \quad H\left(\frac{\partial S(I,q)}{\partial q}, q\right) = h(I) \qquad (4)$$

Предположим сперва, что функция $h(I)$ известна и обратима, так что каждая кривая M_h определяется значением I: $M_h = M_{h(I)}$. Тогда при фиксированном значении I имеем из (4)

$$dS\big|_{I=const} = \underset{q_0}{p\,dq}$$

это соотношение определяет на кривой $M_{h(I)}$ вполне определенную дифференциальную I-форму dS .

Интегрируя вдоль кривой M_h эту I-форму, мы получим (в окрестности точки q_0) функцию

$$S(I,q) = \int_{q_0}^{q} p\,dq\,\Big|_{M_h}$$

Эта функция и будет производящей функцией преобразования (4) в окрестности точки I, q_0 . Первое из условий (3) выполнено автоматически: $I = I(h)$. Чтобы удовлетворить второму условию, рассмотрим поведение $S(I,q)$ в "целом".

При обходе замкнутой кривой $M_{h(I)}$ интеграл pdq получает приращение

$$\Delta S(I) = \oint_{M_h} pdq$$

равное площади Π_1, ограниченной кривой M_h. Поэтому функция S -"многозначная функция" на кривой M_h :она определена с точностью до прибавления целого кратного Π_1. На производную $\frac{\partial S}{\partial q}$ это слагаемое не влияет; но оно приводит к неоднозначности $\varphi = \frac{\partial S}{\partial I}$. Эта производная оказывается определенной лишь с точностью до слагаемого кратного $\frac{d}{dI}\Delta S(I)$. Точнее говоря, формулы (4) определяют I-форму $d\varphi$ на кривой M_f, и интеграл этой формы по M_f равен $\frac{d}{dI}\Delta S(I)$.

Чтобы выполнялось второе из условий (3), $\oint_{M_h} d\varphi = 2\pi$, нужно, чтобы

$$\frac{d}{dI}\Delta S(I) = 2\pi, \quad I = \frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{\Pi}{2\pi}$$

где $\Pi_h = \oint_{M_h} pdq$ - площадь, ограниченная фазовой кривой $H = h$.

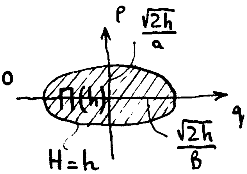
Определение. Переменной действия в одномерной задаче с функцией Гамильтона $H(p,q)$ называется величина $I(h) = \frac{1}{2\pi}\Pi(h)$.

Окончательно, мы приходим к следующему выводу. Пусть $\frac{d\Pi}{dh} \neq 0$. Тогда определена обратная $I(h)$ функция $h(I)$.

<u>ТЕОРЕМА.</u> <u>Положим</u> $S(I,q) = \int_{q_0}^{q} p\,dq \,\big|_{H=h(I)}$;
тогда формулы (4) задают каноническое преобразование $p,q \to I,\varphi$, удовлетворяющее условия (3).

Итак, переменные действие-угол в одномерном случае построены.

<u>Задача</u>. Найти S и I для гармонического осциллятора.



<u>Ответ</u>. Если $H = \frac{a^2p^2}{2} + \frac{b^2q^2}{2}$, то M_h - эллипс, ограничивающий площадь

$\Pi(h) = \pi \cdot \frac{\sqrt{2h}}{a} \cdot \frac{\sqrt{2h}}{b} = \frac{2\pi h}{ab} = \frac{h}{\omega}$.

для гармонического осциллятора переменная действия есть отношение энергии к частоте. Угловая переменная φ -это, конечно, фаза колебаний.

<u>Задача</u>. Доказать, что период T движения по замкнутой кривой $H=h$ на фазовой плоскости p,q равен производной площади, ограниченной этой кривой, по h :

$$T = \frac{d\Pi(h)}{dh}$$

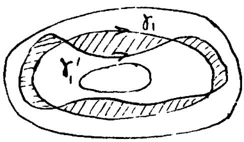
<u>Решение</u>. В переменных действие-угол уравнения движения (2) дают

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial I} = \left(\frac{dI}{dh}\right)^{-1} = 2\pi\left(\frac{d\Pi}{dh}\right)^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\dot\varphi} = \frac{d\Pi}{dh}$$

Перейдем теперь к системе с n степенями свободы, заданной в $\mathbb{R}^{2n} = \{(p,q)\}$ функцией Гамильтона $H(p,q)$ и имеющей n первых интегралов в инволюции, $F_1 = H$, $F_2, \ldots, F_n$. Я не буду повторять рассуждений, которые привели нас к выбору $2\pi I = \oint p\,dq$ в одномерном случае и сразу определю n переменных действия $\mathbb{I}$.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ –базисные одномерные циклы тора M_f (приращение координаты φ_i на цикле γ_j равно 2π, если $i=j$ и 0, если $i \neq j$). Положим

(5) $\quad I_i(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \mathbb{p}\,d\mathbb{q}$



<u>Задача</u>. <u>Докажите, что этот интеграл не зависит от выбора кривой γ_i, представляющей базисный цикл.</u>

<u>Указание</u>. В лекции 39 показано, что на многообразии M_f 2-форма $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$ равна 0. По формуле

$$\oint_{\gamma} - \oint_{\gamma'} \mathbb{p}\,d\mathbb{q} = \iint_{\sigma^2} d\mathbb{p} \wedge d\mathbb{q} = 0$$

где $\partial\sigma^2 = \gamma' - \gamma$

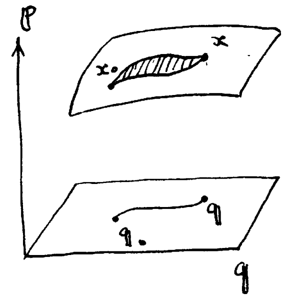
<u>Определение</u>. n величин $I_i(f)$, заданных формулами (5), называются <u>переменными действия.</u>

Предположим, теперь, что при заданных значениях f интегралов F и величин I_i независимы: $\det\left|\frac{\partial I}{\partial f}\right| \neq 0$. Тогда в окрестности тора M_f можно принять переменные $\mathbb{I}, \varphi$ за координаты.

<u>ТЕОРЕМА</u>. <u>Преобразование</u> $\mathbb{p}, \mathbb{q} \to \mathbb{I}, \varphi$ – <u>каноническое, т.е.</u>

$$\sum dp_i \wedge dq_i = \sum dI_i \wedge d\varphi_i$$

Намечу доказательство этой теоремы. Рассмотрим на M_f дифференциальную I-форму $p\,dq$. Поскольку многообразие M_f нулевое (лекция 39), эта форма на M_f замкнута: ее внешняя производная $\omega^2 = dp \wedge dq$ на многообразии M_f тождественно равна 0. Поэтому



$$S(x) = \int_{x_0}^{x} p\,dq \Big|_{M_f}$$

не меняется при деформации пути интегрирования (формула Стокса). Итак, $S(x)$ есть "многозначная функция" на M_f; ее периоды равны

$$\Delta_i S = \oint_{\gamma_i} dS = 2\pi I_i$$

Пусть теперь x -такая точка M_f, в окрестности которой n переменных q служат координатами на M_f, так что подмногообразие $M_f \subset \mathbb{R}^{2n}$ задается n уравнениями вида $p = p(I, q)$, $q(x) = q_0$.
В односвязной окрестности точки q_0 определена однозначная функция

$$S(I, q) = \int_{q_0}^{q} p(I, q)\,dq$$

и мы можем принять ее за производящую функцию канонического преобразования $p, q \to I, \varphi$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}$$

Нетрудно проверить, что эти формулы в действительности задают каноническое преобразование не только в окрестности рассматриваемой точки, но и "в целом" в окрестности M_f ; при этом координаты φ будут многозначными, с периодами

$$\Delta_i \varphi_j = \Delta_i \frac{\partial S}{\partial I_j} = \frac{\partial}{\partial I_j} \Delta_i S = \frac{\partial}{\partial I_j} 2\pi I_i = 2\pi \delta_{ij}$$

что и требовалось.

Заметим теперь, что все наши построения содержат лишь "алгебраические" операции (обращение функций) и "квадратуру" - вычисление интеграла известной функции. Таким образом, задача интегрирования канонической системы $2n$ уравнений, у которых известны n первых интегралов в инволюции, решается в квадратурах, что и доказывает последнее утверждение теоремы Лиувилля (лекция 39).

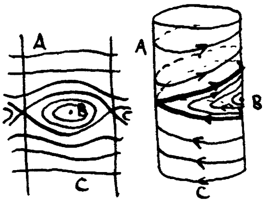
<u>Замечание I</u>. Уже в одномерном случае переменные действие-угол I, φ определены не однозначно условиями (3). А именно, за переменную действия можно было бы принять $I' = I + const$, а за угловую переменную $\varphi' = \varphi + C(I)$

Замечание 2. Мы построили переменные действие-угол для системы с фазовым пространством $\mathbb{R}^{2n}$. Можно было бы ввести переменные действие-угол и для системы на произвольном каноническом многообразии. Ограничусь здесь одним простым примером.

Фазовым пространством маятника ($H = \frac{p^2}{2} - \cos q$) , естественно считать не плоскость p, q , а поверхность

цилиндра $\mathbb{R}^1 \times S^1$, получающуюся при отождествлении углов q, отличающихся целым кратным 2π.
Критические линии уровня $H = \pm 1$ разбивают цилиндр на три части, A, B, C каждая из которых диффеоморфна прямому произведению $\mathbb{R}^1 \times S^1$. В каждой части можно ввести переменные действие-угол.

В ограниченной части (B) замкнутые траектории изображают качания маятника, в неограниченных частях – вращения.



<u>Замечание 3.</u> Как и в разобранном примере, в общем случае уравнения $F_i = f_i$, при некоторых значениях f_i перестают быть независимыми, и M_f перестает быть многообразием. Таким критическим значениям f соответствуют сепатриссы, разделяющие фазовое пространство интегрируемой задачи на части, подобные частям A, B, C выше. В некоторых из этих частей многообразия M_f могут быть неограниченными (части A и C на плоскости p, q); другие же расслаиваются на n-мерные инвариантные торы M_f, в окрестности такого тора можно ввести переменные действие-угол.

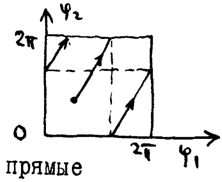
ЛЕКЦИЯ 41. УСРЕДНЕНИЕ

В предыдущих лекциях нам часто встречалось условно-периодическое движение: фигуры Лиссажу, прецессия, нутация и вращение волчка, и т.п. Напомню определение условно-периодического движения. Пусть T^n - -мерный тор, $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_n \pmod{2\pi}$ - угловые координаты. Тогда условно-периодическим движением называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов $T^n \to T^n$, заданная дифференциальными уравнениями

$$\dot{\varphi} = \omega \qquad\qquad \omega = \omega_1, \ldots, \omega_n = \text{const}$$

Эти дифференциальные уравнения немедленно интегрируются:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$$



Таким образом, на карте φ траектории - прямые линии. Траектория на торе называется обмоткой тора.

Пример. Пусть $n = 2$. Если $\omega_1/\omega_2 = m/n$, то траектории замкнуты; если ω_1/ω_2 и иррационально, то траектории на торе всюду плотны (см. лекцию 3).

Величины $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_n$ называются частотами условно-периодического движения. Частоты называются независимыми, когда они линейно независимы над полем рациональных чисел: если $k \in \mathbb{Z}^n$ *) и $(k, \omega) = 0$, то $k = 0$.

*) $k = k_1, \ldots, k_n$ с целыми k_i.

Пусть теперь $f(\varphi)$ - интегрируемая функция на торе T^n.

Определение. Пространственным средним функции f на торе T^n называется число

$$\bar{f} = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$$

Рассмотрим значение функции $f(\varphi)$ на траектории $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. Это - функция времени $f(\varphi_0 + \omega t)$. Рассмотрим ее среднее.

Определение. Временным средним функции f на торе T^r называется функция

$$f^*(\varphi_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_0 + \omega t) dt$$

(определенная там, где предел существует).

ТЕОРЕМА. об усреднении. Временное среднее всюду существует и совпадает с пространственным, если функция $f(\varphi)$ непрерывна, (или хотя бы интегрируема по Риману), а частоты ω_i независимы.

Задача. Покажите, что если частоты зависимы, временное среднее может не всюду совпадать с пространственным.

Следствие I. Если частоты независимы, то каждая траектория $\varphi(t)$ всюду плотна на торе T^n.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в окрестности $\mathcal{D}$ некоторой точки тора нет точек траектории

$\varphi(t)$. Легко построить непрерывную функцию f, равную 0 вне $\mathcal{D}$ и со средним $\bar{f} = 1$. Временное среднее $f^*(\varphi_0)$ на траектории $\varphi(t)$ равно 0. Вопреки теореме, $0 \neq 1$; противоречие с теоремой доказывает следствие I.

Следствие 2. Если частоты независимы, то каждая траектория равномерно распределена на торе T^n.

Это означает, что доля времени, которое траектория проводит в области $\mathcal{D}$, пропорциональна мере $\mathcal{D}$.

Точнее, пусть $\mathcal{D}$ -измеримая (по Жордану) область на T^n. Обозначим через $\tau_{\mathcal{D}}(T)$ количество времени, которое отрезок $0 \leq t \leq T$ траектории $\varphi(t)$ находится внутри $\mathcal{D}$. Тогда

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\tau_{\mathcal{D}}(T)}{T} = \frac{\operatorname{mes} \mathcal{D}}{(2\pi)^n}$$

Доказательство. Применим теорему к характеристической функции f множества $\mathcal{D}$ (f интегрируема по Риману, т.к. область $\mathcal{D}$ измерима по Жордану). Тогда $\int_0^T f(\varphi(t))\,dt = \tau_{\mathcal{D}}(T)$, а $\bar{f} = \frac{\operatorname{mes} \mathcal{D}}{(2\pi)^n}$, и следствие непосредственно вытекает из теоремы.

Задача. Во сколько раз в последовательности

I,2,4,8,3,6,I,2,5,I,2...

первых цифр чисел 2^n чаще встречается 7, чем 8?

Теорема об усреднении неявно встречается уже в работах Лапласа, Лагранжа и Гаусса по небесной механике; она является одной из первых "эргодических теорем". Строгое доказательство дали лишь в 1909г. рижский математик П.Боль, польский математик В.Серпинский и немецкий математик Г.Вейль, в связи с задачей Лагранжа о среднем движении перигелия Земли. Я воспроизведу ниже доказательство Г.Вейля.

Доказательство теоремы об усреднении.

ЛЕММА I. Теорема верна для экспонент $f = e^{i(\mathbb{k},\varphi)}$, $\mathbb{k} \in \mathbb{Z}^n$.

Доказательство. Если $\mathbb{k}=0$, то $\bar{f} = f = f^* = 1$ и теорема очевидна. Если $\mathbb{k} \neq 0$, то $\bar{f} = 0$. С другой стороны,

$$\int_0^T e^{i(\mathbb{k},\varphi_0+\omega t)}dt = e^{i(\mathbb{k},\varphi_0)} \int_0^T \frac{e^{i(\mathbb{k},\omega t)}}{i(\mathbb{k},\omega)} d\, i(\mathbb{k},\omega)t =$$

$$= e^{i(\mathbb{k},\varphi_0)} \frac{[e^{i(\mathbb{k},\omega)T} - 1]}{i(\mathbb{k},\omega)}$$

Поэтому временное среднее

$$\lim_{T\to\infty} \frac{e^{i(\mathbb{k},\varphi_0)}}{i(\mathbb{k},\omega)} \cdot \frac{e^{i(\mathbb{k},\omega)T} - 1}{T} = 0$$

что и требовалось доказать.

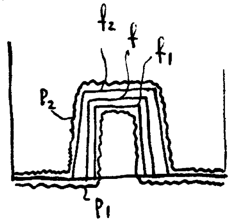
ЛЕММА 2. Теорема верна для тригонометрических полиномов

$$f = \sum_{|\mathbb{k}|<N} f_{\mathbb{k}} e^{i(\mathbb{k},\varphi)}$$

Доказательство. И временное, и пространственное среднее зависят от f линейно.

ЛЕММА 3. Пусть f - вещественная непрерывная (или хотя бы интегрируемая по Риману) функция. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют два тригонометрических полинома P_1, P_2 таких, что $P_1 < f < P_2$, $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}(P_2-P_1)d\varphi<\varepsilon$.

Доказательство. Пусть сначала f непрерывна. По теореме Вейерштрасса ее можно приблизить тригонометрическим полиномом P , $|f-P|<\frac{\varepsilon}{2}$. Полиномы $P_1=P-\frac{\varepsilon}{2}$, $P_2=P+\frac{\varepsilon}{2}$ - искомые.



Если же f разрывна, интегрируема, по Риману, то существуют*) две непрерывные функции f_1, f_2 , так что $f_1<f<f_2$ $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}(f_2-f_1)d\varphi < \frac{\varepsilon}{3}$ (чертеж соответствует характеристической функции отрезка). Аппроксимируя f_2 и f_1 полиномами $P_2>f_2>f_1>P_1$, $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}(P_2-f_2)\,d\varphi<\frac{\varepsilon}{3}$, $\frac{1}{(2\pi)^n}\int(f_1-P_1)d\varphi<\frac{\varepsilon}{3}$, получим требуемое.

Теперь легко окончить доказательство теоремы. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда по лемме 3 существуют тригонометрические полиномы

$P_1<f<P_2$, $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{T^n}(P_2-P_1)\,d\varphi<\varepsilon$

При любом T имеем тогда

$$\frac{1}{T}\int_0^T P_1(\varphi(t))dt < \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi(t))dt < \frac{1}{T}\int_0^T P_2(\varphi(t))dt$$

---

*) Задача: доказать это утверждение.

По лемме 2 при $T > T_0(\varepsilon)$

$$\left|\overline{P}_1 - \frac{1}{T}\int_0^T P_1(\varphi(t))\,dt\right| < \varepsilon, \quad \left|\overline{P}_2 - \frac{1}{T}\int_0^T P_2(\varphi(t))\,dt\right| < \varepsilon$$

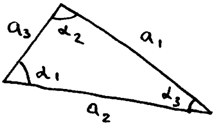
Далее, $\overline{P}_1 < \overline{f} < \overline{P}_2$ и $\overline{P}_2 - \overline{P}_1 < \varepsilon$. Поэтому $\overline{P}_2 - \overline{f} < \varepsilon$, $\overline{f} - \overline{P}_1 < \varepsilon$, следовательно, при $T > T_0(\varepsilon)$.

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi(t))\,dt - \overline{f}\right| < 2\varepsilon$$

что и требовалось доказать.

Задача. Двумерный осциллятор с кинетической энергией $T = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2}$ и потенциальной энергией $U = \frac{x^2}{2} + y^2$ совершает колебания с амплитудами $a_x = 1$, $a_y = 1$. Найти временное среднее кинетической энергии.

Задача.*) Пусть ω_k независимы, $a_k > 0$. Вычислить



$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \arg \sum_{k=1}^{3} a_k e^{i\omega_k t}$$

Ответ. $\dfrac{\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3}{\pi}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы треугольника.

---

*) Лагранж показал, что к подобной задаче сводится исследование среднего движения перигелиев планет. Решение этой задачи можно найти в работах Г.Вейля.

До сих пор мы рассматривали случай, когда частоты ω независимы. Целочисленный вектор $\mathbb{k} \in \mathbb{Z}^n$ называется соотношением между частотами, если $(\mathbb{k}, \omega) = 0$.

Задача. Докажите, что множество всех соотношений между данными частотами ω образует подгруппу Γ решетки $\mathbb{Z}^n$.

Но мы видели в предыдущих лекциях, что такая подгруппа состоит из всех целочисленных линейных комбинаций r независимых $\mathbb{k}_i$, $1 \leq r \leq n$. Мы скажем, что между частотами имеется r (независимых) соотношений.*)

Задача. Докажите, что замыкание траектории $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ (на T^n) представляет собой тор размерности $n-r$, если между частотами ω имеется r независимых соотношений; в этом случае движение на T^{n-r} - условно-периодическое, с $n-r$ независимыми частотами.

Вернемся теперь к интегрируемой Гамильтоновой системе, заданной в переменных действие - угол $\mathbb{I}, \varphi$ уравнениями

$$\dot{\mathbb{I}} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(\mathbb{I}), \quad \text{где} \quad \omega(\mathbb{I}) = \frac{\partial H}{\partial \mathbb{I}}$$

Каждый n -мерный тор $\mathbb{I} = const$ в $2n$ -мерном фазовом пространстве инвариантен, и движение на нем условно-периодично.

---

*) Докажите, что число r не зависит от выбора независимых векторов $\mathbb{k}$.

Определение. Система называется невырожденной, если отличен от 0 определитель

$$\frac{\partial \omega}{\partial I} = \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} \neq 0$$

Задача. Докажите, что если система невырождена, то в любой окрестности любой точки имеются условно-периодические движения с n частотами, а также с любым меньшим числом частот.

Указание. Вместо переменных I можно за локальные координаты принять сами частоты ω. В пространстве наборов частот множеств точек ω с любым числом r соотношений $(0 \leq r \leq n)$ всюду плотны.

Следствие. Если система невырождена, то инвариантные торы $I = const$ определены однозначно, независимо от выбора координат действие-угол I, φ в построении которых имеется всегда некоторый произвол.*)

Действительно, торы $I = const$ можно определить как замыкания фазовых траекторий соответствующих независимым ω.

Замечу кстати, что при большинстве значений I частоты ω будут независимы.

Задача. Докажите, что лебегова мера множества тех I, для которых частоты $\omega(I)$ в невырожденной системе зави-

---

*) Например, всегда допустимы замены $I' = I$, $\varphi' = \varphi + \frac{\partial S}{\partial I}$, или $I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2 \to I_1 + I_2, I_2, \varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1$

симы, равна 0.

Указание. Сначала докажите, что $mes\{\omega: \exists \mathbf{k}\neq 0: (\omega, \mathbf{k})=0\}=0$.

Напротив того, в вырожденной системе можно построить такие системы переменных действие-угол, что торы $\mathbf{I}=const$ в одной и в другой системе будут разными. Это объясняется тем, что замыкания траекторий вырожденной системы - торы размерности $k<n$, и их можно по-разному соединять в n -мерные торы.

Пример I. Плоский гармонический осциллятор $\ddot{\mathbf{x}}=-\mathbf{x}$ $n=2,\ k=1$. Разделение переменных в декартовых и в полярных координатах приводит к разным переменным действие-угол разным торам.

Пример 2. Кеплерово плоское движение $\left(U=-\frac{1}{r}\right)$ $n=2,\ k=1$. Здесь также разделение переменных в полярных и в эллиптических координатах приводит к разным $\mathbf{I}$.

ЛЕКЦИЯ 42. НЕИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Мы рассмотрели выше довольно много интегрируемых систем (одномерные задачи, задача двух тел, малые колебания, случаи Эйлера и Лагранжа движения твердого тела с закрепленной точкой и т.д.). Мы изучили характер фазовых траекторий в этих системах: они оказались "обмотками торов", заполняющими всюду плотно инвариантные торы в фазовом пространстве; каждая траектория распределена на этом торе равномерно.

Не следует думать, что такая ситуация типична для задач общего вида. В действительности, свойства траекторий в многомерных системах могут быть весьма разнообразными и совсем не похожими на свойства условно-периодических движений. В частности, замыкание траектории системы с n степенями свободы может заполнять в $2n$ -мерном фазовом пространстве сложные множества размерности больше n ; траектория может даже быть всюду плотной и равномерно-распределенной на всем $2n-1$ -мерном многообразии, заданном уравнением $H=h$.ж) Термин "неинтегрируемые" в применении к этим системам оправдан, так как они не допускают однозначных первых интегралов, не зависящих от H .

Исследование таких сложных систем еще далеко от завершения; оно составляет задачу "эргодической теории".

ж) К этому классу относится, например, движение по инерции на многообразиях отрицательной кривизны.

Одни из подходов к неинтегрируемым системам - изучение систем, близких к интегрируемым. Задачи механики дают много примеров этого рода: так, задача о движении планет вокруг Солнца близка к интегрируемой задаче о движении невзаимодействующих планет вокруг неподвижного центра; упомяну еще задачу о движении слегка несимметричного волчка и задачу о нелинейных колебаниях вблизи положения равновесия (близкая интегрируемая задача - линейная). При исследовании этих и подобных задач чрезвычайно плодотворен

Принцип усреднения

Пусть I, φ - переменные действие-угол в интегрируемой системе с функцией Гамильтона $H_0(I)$:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I), \quad \omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}$$

В качестве близкой системы рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi) \\ \dot{I} &= \varepsilon g(I, \varphi) \end{aligned} \qquad (I)$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Забудем временно о гамильтоновости системы, и рассмотрим произвольную систему дифференциальных уравнений (I), заданную на прямом произведении $T^k \times G$ k-мерного тора $T^k = \{\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_k (\mathrm{mod}\, 2\pi)\}$ и области G ℓ-мерного пространства $G \subset \mathbb{R}^\ell = \{I = I_1, \dots, I_\ell\}$. При $\varepsilon = 0$ движение

(I) условно-периодическое k -частотное, с k -мерными инвариантными торами.

Принцип усреднения для системы (I) состоит в ее замене другой системой, называемой усредненной системой:

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J) \quad , \quad \bar{g}(J) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(J, \varphi)\, d\varphi_1 \dots d\varphi_k \tag{2}$$

в ℓ -мерной области $(G \subset \mathbb{R}^\ell = \{J = J_1, \dots, J_\ell\})$.

Утверждается, что система (2) хорошо аппроксимирует систему (I).

Заметим, что этот принцип - не теорема, не аксиома и не определение, а физическое предложение, т.е. расплывчато формулированное и вообще говоря неверное утверждение.

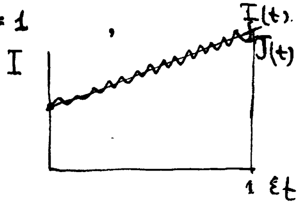
Такие утверждения обычно бывают плодотворным источником математических теорем.

Рассматриваемый принцип усреднения явно встречается уже у Гаусса (при изучении возмущений планет друг другом Гаусс предложил размазать массу каждой планеты по ее орбите пропорционально времени и заменить притяжение планет притяжением полученных колец). Тем не менее, удовлетворительное исследование связи между решениями систем (I) и (2). в общем случае не проведено и посейчас.

При замене системы (I) системой (2) мы откидываем в правой части слагаемое $\varepsilon \tilde{g}(I, \varphi) = \varepsilon g(I, \varphi) - \varepsilon \bar{g}(I, \varphi)$.

Это слагаемое имеет порядок ε , такой же, как и оставленное слагаемое $\varepsilon\bar{g}$. Чтобы понять различие роли слагаемых $\bar{g}$ и $\tilde{g}$ в g , рассмотрим простейший пример.

Задача. Рассмотрите случай $k=\ell=1$,



$$\dot{\varphi}=\omega\neq 0 \quad , \quad \dot{I}=\varepsilon g(\varphi)$$

Покажите, что при $0<t<\frac{1}{\varepsilon}$

$$|I(t)-J(t)|<C\varepsilon \quad , \text{где } J(t)=I(0)+\varepsilon\bar{g}t$$

Решение.

$$I(t)-I(0)=\int_0^t \varepsilon g(\varphi_0+\omega t)\,dt=\int_0^t \varepsilon\bar{g}\,dt+\frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^{\frac{t}{\omega}}\tilde{g}(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\varepsilon\bar{g}t+\frac{\varepsilon}{\omega}h\left(\frac{t}{\omega}\right)$$

где $h(\varphi)=\int_0^{\varphi}\tilde{g}(\varphi)\,d\varphi$ - периодическая и, следовательно, ограниченная функция.

Таким образом, изменение I со временем состоит из двух частей: осцилляций порядка ε , зависящих от $\tilde{g}$, и систематической "эволюции" со скрростью $\varepsilon\bar{g}$.

Принцип усреднения основан на представлении о том, что и в общем случае движение системы (I) можно разделить на "эволюцию" (2) и малые осцилляции. В общем виде такое представление не обосновано, а сам принцип неверен.

Тем не менее, применим его к гамильтоновой системе (I):

$$\dot{\varphi}=-\frac{\partial}{\partial I}\left(H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\varphi)\right)$$

$$\dot{I}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\varphi)\right)$$

В качестве правой части усредненной системы (2) получим тогда

$$\bar{g} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_1(I,\varphi)\, d\varphi = 0$$

Иными словами, в гамильтоновой невырожденной системе эволюции нет.

Один из вариантов этого совсем нестрогого вывода приводит к т.н. теореме Лапласа:

большие полуоси кеплеровых эллипсов планет не имеют вековых возмущений.

Сказанного достаточно, чтобы убедиться в важности принципа усреднения; я сформулирую теперь теорему, обосновывающую этот принцип в одном - весьма частном случае: случае одночастотных колебаний $(k=1)$.

Рассмотрим систему $\ell+1$ дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= \omega(I) + \varepsilon f(I,\varphi), \quad \text{где } \varphi \bmod 2\pi \in S^1 \\ \dot I &= \varepsilon g(I,\varphi), \quad \text{где } f(I,\varphi+2\pi) = f(I,\varphi) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad g(I,\varphi+2\pi) = g(I,\varphi) \end{aligned} \tag{I}$$

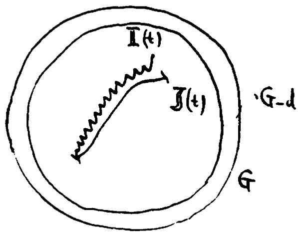
и "усредненную" систему из ℓ уравнений

$$\dot J = \varepsilon \bar g(J), \quad \text{где } \bar g(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(J,\varphi)\,d\varphi \tag{2}$$

Обозначим через $I(t)$, $\varphi(t)$ решение системы (I) с начальным условием $\mathbf{I}(0), \varphi(0)$, а через $\mathbf{J}(t)$ – решение системы (2) с тем же начальным условием, $\mathbf{J}(0) = \mathbf{I}(0)$.

ТЕОРЕМА. Пусть 1) функции ω, f, g определены, когда $\mathbf{I}$ меняется в области G, и в этой области ограничены со своими производными до второго порядка включительно:

$$\|\omega, f, g\|_{C^2(G)} < C_1$$



2) в области G

$$\omega(\mathbf{I}) > c > 0$$

3) при $0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$, точка $\mathbf{J}(t)$ принадлежит G с окрестностью радиуса d:

$$\mathbf{J}(t) \in G - d$$

Тогда при достаточно малом ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$

$$|\mathbf{I}(t) - \mathbf{J}(t)| < C_3\varepsilon \qquad \text{для всех } t,\ 0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$$

где постоянная $C_3 > 0$ зависит от C_1, c, d но не от ε.

Некоторые приложения этой теоремы будут даны ниже ("адиабатические инварианты"). Замечу, что основная идея доказательства этой теоремы (замена переменных, убивающая возмущение) важнее самой теоремы; это – одна из основных идей в теории обыкновенных дифференциальных уравнений; она встречается уже в элементарном курсе в виде "метода вариации постоянных".

Вместо переменных П введем новые переменные $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P} = \mathbb{I} + \varepsilon \mathbb{k}(\mathbb{I}, \varphi) \quad , \quad \mathbb{k}(\mathbb{I}, \varphi + 2\pi) = \mathbb{k}(\mathbb{I}, \varphi) \qquad (3)$$

функции $\mathbb{k}$ подберем так, чтобы $\mathbb{P}$ удовлетворяло более простому дифференциальному уравнению. Имеем из (I), (3)

$$\dot{\mathbb{P}} = \dot{\mathbb{I}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbb{k}}{\partial \mathbb{I}} \cdot \dot{\mathbb{I}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbb{k}}{\partial \varphi} \cdot \dot{\varphi} = \varepsilon \left[\mathbb{g}(\mathbb{I}, \varphi) + \frac{\partial \mathbb{k}}{\partial \varphi} \omega(\mathbb{I}) \right] + \qquad (4)$$
$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbb{k}}{\partial \mathbb{I}} \mathbb{g} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbb{k}}{\partial \varphi} f$$

Предположим, что замену (3) можно обратить так, что

$$\mathbb{I} = \mathbb{P} + \varepsilon \mathbb{h}(\mathbb{P}, \varphi, \varepsilon) \quad , \quad \mathbb{h}(\ldots \varphi + 2\pi \ldots) = \mathbb{h}(\ldots \varphi \ldots) \qquad (5)$$

тогда из (4),(5) следует, что $\mathbb{P}$ подчиняется системе уравнений

$$\mathbb{P} = \varepsilon \left[\mathbb{g}(\mathbb{P}, \varphi) + \frac{\partial \mathbb{k}}{\partial \varphi} \omega(\mathbb{P}) \right] + \mathbb{R} \qquad (6)$$

где

$$|\mathbb{R}| < C_2 \varepsilon^2 \qquad C_2(C_1, C_3, C_4) > 0 \qquad (7)$$

если только

$$\|\omega\|_{C^2} < C_1 , \|\varepsilon f\|_{C^2} < C_1 \varepsilon , \|\varepsilon \mathbb{g}\|_{C^2} < C_1 \varepsilon , \|\varepsilon \mathbb{k}\|_{C^2} < C_3 \varepsilon ,$$
$$\|\varepsilon \mathbb{h}\|_{C^2} < C_4 \varepsilon \qquad (8)$$

Постараемся теперь выбрать замену переменных (3) так, чтобы обратить в 0 член с ε в (6). Мы получаем для $\mathbb{K}$ уравнение

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \varphi} = -\frac{\mathfrak{g}}{\omega}$$

Вообще говоря, такое уравнение неразрешимо в классе периодических по φ функций $\mathbb{K}$. Действительно, среднее значение (по φ) левой части равно всегда 0.

Поэтому мы не можем выбрать $\mathbb{K}$ так, чтобы убить целиком часть с ε в (6). Однако мы можем убить всю "периодическую" часть $\mathfrak{g}$,

$$\tilde{g}(\mathbb{P},\varphi) = g(\mathbb{P},\varphi) - \bar{g}(\mathbb{P})$$

полагая

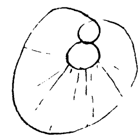
$$\mathbb{K}(\mathbb{P},\varphi) = -\int_0^{\varphi} \frac{\tilde{g}(\mathbb{P},\varphi)\,d\varphi}{\omega(\mathbb{P})} \tag{9}$$

Итак, определим функцию $\mathbb{K}$ формулой (9). Тогда, ввиду условий I) и 2) теоремы функция $\mathbb{K}$ удовлетворяет оценке $\|\mathbb{K}\|_{C^2(G)} < C_3$, где $C_3(C_1, C) > 0$. Чтобы установить неравенства (8), остается лишь оценить $\mathbb{h}$. Для этого прежде всего нужно показать, что замена (3) обратима.

<u>ЛЕММА</u>. <u>Если ε достаточно мало, то ограничение отображения (3) на область $G-\alpha$ (состоящую из точек, вхо-</u>

дящих в G с α -окрестностью) есть диффеоморфизм. Обратный диффеоморфизм (5) в области $G-2\alpha$ удовлетворяет оценке $\|\mathbb{h}\|_{C^2} < C_4$, $C_4(\alpha, C_3) > 0$

Доказательство этой леммы основано на топологическом понятии степени отображения и здесь приведено не будет. Замечу лишь, что утверждение леммы не вытекает из теоремы о неявной функции; это видно, например, из того, что вблизи края G отображение $\mathbb{I} \to \mathbb{I} + \varepsilon \mathbb{k}$ может не быть взаимно-однозначным. Напротив, оценка $\mathbb{h}$ в области, где эта функция определена, получается непосредственно из теоремы о неявной функции.



Из леммы вытекает, что при достаточно малом ε справедливы все оценки (8). Значит справедлива также оценка (7).

Сравним теперь системы дифференциальных уравнений для $\mathbb{J}$

$$\dot{\mathbb{J}} = \varepsilon \bar{\mathbb{g}}(\mathbb{J}) \qquad (2)$$

и для $\mathbb{P}$; последняя, ввиду (9), принимает вид

$$\dot{\mathbb{P}} = \varepsilon \bar{\mathbb{g}}(\mathbb{P}) + \mathbb{R} \qquad (6)$$

Поскольку разница между правыми частями порядка ε^2 (см. (7)), за время $t \sim 1/\varepsilon$ решения расходятся на расстояние $|\mathbb{P} - \mathbb{J}| \sim \varepsilon$. С другой стороны, $|\mathbb{I} - \mathbb{P}| = |\mathbb{k}| \sim \varepsilon$. Итак, разность $|\mathbb{I} - \mathbb{J}|$ при $t \sim 1/\varepsilon$ имеет порядок ε , что и требуется.

Переходя к аккуратным оценкам, введем величину

$$\mathbb{Z}(t) = \mathbb{P}(t) - \mathbb{J}(t)\text{, где } \mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(\mathbb{J}(t), \varphi(t)) \qquad (10)$$

Тогда из (6), (9) вытекает

$$\dot{\mathbb{Z}} = \varepsilon(\bar{g}(\mathbb{P}) - g(\mathbb{J})) + \mathbb{R} = \varepsilon \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbb{P}} \mathbb{Z} + \mathbb{R}'$$

где $|\mathbb{R}'| < C_2\varepsilon^2 + C_5\varepsilon|\mathbb{Z}|$, если отрезок $(\mathbb{P}, \mathbb{J})$ лежит в $G-\alpha$. В этом предположении мы находим

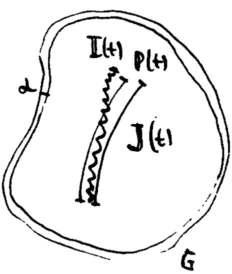
$$|\dot{\mathbb{Z}}| \le C_6\varepsilon|\mathbb{Z}| + C_2\varepsilon^2\text{, где } C_6 = C_5 + C_1 \qquad (11)$$

$$|\mathbb{Z}(0)| \le C_3\varepsilon$$

<u>ЛЕММА</u>. <u>Если $|\dot{\mathbb{Z}}| < a|\mathbb{Z}| + b$, $|\mathbb{Z}(0)| < d$, $a, b, d > 0$, то $|\mathbb{Z}(t)| < (d + bt)e^{at}$</u>.

<u>Доказательство</u>. $|\mathbb{Z}(t)|$ не превосходит решения $y(t)$ уравнения $\dot{y} = ay + b$, $y(0) = d$. Решая это уравнение, находим $y = ce^{at}$, $\dot{c}e^{at} = b$, $\dot{c} = e^{-at}b$, $c(0) = d$, $c \le d + bt$, что и требовалось доказать. Теперь из (11), в предположении, что отрезок $\mathbb{P}, \mathbb{J}$ лежит в $G-\alpha$,

$$|\mathbb{Z}(t)| < (C_3\varepsilon + C_2\varepsilon^2 t)e^{C_6\varepsilon t}$$



Отсюда следует, что при $0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$

$$|\mathbb{Z}(t)| < C_7\varepsilon\text{, } C_7 = (C_3 + C_2)e^{C_6}$$

Мы видим теперь, что если $\alpha = \frac{d}{3}$ и ε достаточно мало, то отрезок $\mathbb{P}(t), \mathbb{J}(t)$ весь лежит внутри $G-\alpha$, и, следовательно,

$$|\mathbb{P}(t) - \mathbb{J}(t)| < C_8 \varepsilon \qquad \text{при всех } 0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$$

С другой стороны $|\mathbb{P}(t) - \mathbb{I}(t)| < |\varepsilon \mathbb{k}| < \varepsilon \cdot C_3$. Итак, при всех t, $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}$,

$$|\mathbb{I}(t) - \mathbb{J}(t)| < C_9 \varepsilon \qquad C_9 = C_8 + C_3 > 0$$

что и требовалось доказать.

В качестве одного из приложений доказанной теоремы рассмотрим так называемые

<u>Адиабатические инварианты</u>

Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы, с функцией Гамильтона $H(p, q, \lambda)$, зависящей от параметра λ.

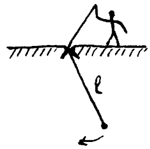
Примером может служить маятник:

$$H = \frac{p^2}{2\ell^2} + \ell g \frac{q^2}{2}$$

в качестве параметра λ можно взять длину ℓ или ускорение силы тяжести g.

Предположим, что параметр со временем медленно меняется. Оказывается, в пределе, когда скорость изменения параметра стремится к 0, появляется замечательное асимптотическое явление: две величины, вообще независимые, становятся функциями одна другой.

Предположим, например, что длина маятника медленно (по сравнению с его собственными колебаниями) изменяется. Оказывается, амплитуда его колебаний становится тогда функцией длины маятника. Например, если очень медленно увеличить вдвое длину нити маятника, а затем очень медленно ее уменьшить до прежней величины, то в конце этого процесса амплитуда колебаний станет такой же, какой была в начале.



Более того, оказывается, отношение энергии маятника H к частоте ω при медленном изменении параметров почти не меняется, хотя сами энергия и частота могут измениться сильно. Такие величины, которые мало меняются при медленном изменении параметров, физики назвали адиабатическими инвариантами.

Легко сообразить, что адиабатическая инвариантность отношения энергии маятника к частоте есть утверждение физического характера, т.е. без дополнительных предположений - неверное. Действительно, изменяя длину маятника сколь угодно медленно, но выбирая фазу колебаний, при которой длина увеличивается и уменьшается, можно раскачать маятник (параметрический резонанс!). Чувствуя это, физики предложили формулировать определение адиабатической инвариантности так: лицо, меняющее параметры системы, не должно видеть, в каком состоянии находится система. Понятно, что дать этому определению строгий математический смысл - весьма деликатная, до сих пор полностью не решенная задача. К счастью, мы можем обойтись его суррогатом, заменяя невмешательнство лица, меняющего параметры, во внутренние дела системы требованием, чтобы изменение параметров было плавным – а именно, два раза непрерывно дифференцируемым.

Точнее, пусть $H(p,q,\lambda)$ – фиксированная дважды непрерывно дифференцируемая функция λ. Положим $\lambda=\varepsilon t$ и будем рассматривать полученную систему с медленно меняющимся параметром $\lambda=\varepsilon t$:

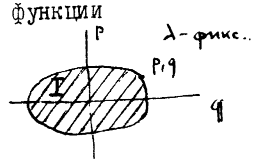
$$\dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}\,,\quad \dot q=\frac{\partial H}{\partial p}\,,\quad H=H(p,q,\lambda) \qquad (*)$$

Определение. Величина $I(p,q,\lambda)$ называется адиабатическим инвариантом системы $(*)$, если для всякого $\varkappa>0$ существует $\varepsilon_0>0$, такое, что если $\varepsilon<\varepsilon_0$, $0<t<\frac{1}{\varepsilon}$, то $|I(p(t),q(t),\varepsilon t)-I(p(0),q(0),0)|<\varkappa$.

Очевидно, всякий первый интеграл является также адиабатическим инвариантом.

Оказывается, всякая одномерная система $(*)$ имеет адиабатический инвариант. А именно, адиабатическим инвариантом является переменная действия в соответствующей задаче с постоянными коэффициентами.

Предположим, что фазовые траектории системы с Гамильтонианом $H(p,q,\lambda)$ замкнуты. Определим функцию $I(p,q,\lambda)$ следующим образом. При фиксированном λ функции Гамильтона $H(p,q,\lambda)$ соответствует определенный фазовый портрет. Рассмотрим



замкнутую фазовую траекторию, проходящую через точку p, q . Она ограничивает на фазовой плоскости некоторую площадь. Обозначим эту площадь через $2\pi I(p,q,\lambda)$. На каждой фазовой траектории (при данном λ) $I = const$. Очевидно, I не что иное, как переменная действия лекции 40.

ТЕОРЕМА. Если частота рассматриваемой системы (ж) $\omega(I,\lambda)$ не обращается в 0, то $I(p,q,\lambda)$ - адиабатический инвариант.

Доказательство.

При фиксированном λ в системе (ж) можно ввести переменные действие-угол I, φ каноническим преобразованием, зависящим от λ

$$p,q \to I,\varphi\ ;\quad \dot{\varphi} = \omega(I,\lambda),\ \dot{I} = 0,\quad \omega(I,\lambda) = \frac{\partial H_0}{\partial I},\ H_0 = H_0(I,\lambda)$$

Обозначим через $S(I,q,\lambda)$ производящую (многозначную) функцию этого преобразования:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q},\quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}$$

Пусть теперь $\lambda = \varepsilon t$.

Поскольку переход от переменных p, q к переменным $I,$ совершается теперь зависящим от времени каноническим преобразованием, уравнения движения в новых переменных I, φ имеют Гамильтонов вид, с функцией Гамильтона (см. лекцию 33 стр.).

$$K = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

Задача. Докажите, что $\frac{\partial S(I,q,\lambda)}{\partial \lambda}$ однозначная функция на фазовой плоскости.

Указание. Неоднозначность S сводится к прибавлению кратных $2\pi I$.

Мы получаем таким образом уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= \omega(I,\lambda) + \varepsilon f(I,\varphi,\lambda) \qquad & -f &= \frac{\partial^2 S}{\partial\lambda\,\partial I} \\ \dot I &= \qquad\qquad \varepsilon g(I,\varphi,\lambda) & & \\ \dot\lambda &= \varepsilon & g &= \frac{\partial^2 S}{\partial\lambda\,\partial\varphi} \end{aligned}$$

Поскольку $\omega \neq 0$, применима теорема стр. 42.4. Усредненная система имеет вид

$$\dot J = \varepsilon \bar g, \quad \dot\lambda = \varepsilon$$

Но $g = \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial S}{\partial\lambda}$, а $\frac{\partial S}{\partial\lambda}$ – однозначная функция на окружности $I = \mathrm{const}$. Поэтому $\bar g = \frac{1}{2\pi}\int g\,d\varphi = 0$, и в усредненной системе J не меняется вовсе: $J(t) = J(0)$.

По теореме стр. 42.4

$$|I(t) - I(0)| < C\varepsilon \qquad \text{для всех } t,\ 0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$$

что и требовалось доказать.

Пример. Для гармонического осциллятора

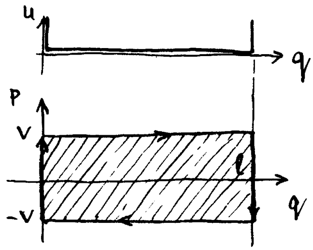
$$H = \frac{a^2}{2}p^2 + \frac{b^2}{2}q^2, \quad I = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{2h}}{a}\cdot\frac{\sqrt{2h}}{b} = \frac{h}{\omega}, \ (\omega = ab)$$

т.е. адиабатическим инвариантом является отношение энергии к частоте.

<u>Задача</u>. Длина маятника медленно увеличивается вдвое $\left(l = l_0(1+\varepsilon t),\ 0 < t < \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Как изменится амплитудный угол отклонения $\bar{q}$?

<u>Решение</u>. $I = \frac{1}{2} l^{3/2} g^{1/2} \bar{q}^2$; поэтому $\bar{q}(t) = \bar{q}(0) \times \left(\frac{l_0}{l(t)}\right)^{3/4} \approx 0{,}6\,\bar{q}(0)$.

в качестве второго примера рассмотрим движение абсолютно упругого твердогоо шарика массы 1 между абсолютно-упругими стенками.



расстояние между которыми l , медленно меняется.

Можно считать, что точка движется в "прямоугольной потенциальной яме бесконечной глубины", и что фазовые траектории - прямоугольники площади $2vl$, где V - скорость шарика. В этом случае адиабатическим инвариантом оказывается произведение vl скорости шарика на расстояние между стенками.*)

Таким образом, если вдвое сблизить стенки, скорость шарика возрастет также вдвое, а если раздвигать стенки, то скорость уменьшится.

---

*) Это не следует формально из доказанной теоремы, так как в ней речь идет о гладких системах, без ударов. Доказательство адиабатической инвариантности vl в этой системе - поучительная элементарная задача.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИИ I,2,3.

Экспериментальные факты классической механики. Закон Ньютона. Системы с одной степенью свободы. Закон сохранения энергии. Фазовая плоскость. Системы с двумя степенями свободы. Закон сохранения энергии. Фазовое пространство. Фигуры Лиссажу. Потенциальное силовое поле.

ЛЕКЦИИ 4,5.

Центральное поле. Интегрирование уравнений движения в центральном поле. Кеплерова задача.

ЛЕКЦИИ 6,7.

Движение системы точек. Теоремы об изменении энергии, импульса и момента импульса. Законы сохранения. Соображения подобия.

ЛЕКЦИЯ 8.

Вариационное исчисление. Управления Эйлера - Лагранжа. Обобщенные координаты. Функция Лагранжа и уравнение Лагранжа. Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона.

ЛЕКЦИЯ 9.

Применение уравнений Лагранжа. Циклические координаты. Преобразование Лежандра.

ЛЕКЦИЯ IO.

Уравнения Гамильтона. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема

ЛЕКЦИЯ II.

Теорема Пуанкаре о возвращении. Связи. Голономные связи.

ЛЕКЦИЯ I2

Дифференциальные многообразия. Касательные пространства. Риманово многообразие. Голономные системы.

ЛЕКЦИЯ I3.

Теорема Э.Нетера и законы сохранения.

ЛЕКЦИЯ I4.

Принцип Даламбера. Виртуальные перемещения. Их связь с законами сохранения.

ЛЕКЦИЯ I5.

Колебания. Точки равновесия системы. Устойчивость положения равновесия. Линеаризация.

ЛЕКЦИИ I6,I7.

Малые колебания. Собственные колебания и собственные частоты. Поведение собственных частот при изменении жесткости системы, при наложении связи.

ЛЕКЦИЯ I8.

Параметрический резонанс

ЛЕКЦИИ 19,20.

Движение в подвижной системе координат. Теорема о сложении скоростей. Силы инерции. Силы Кориолиса. Мятник Фуко.

ЛЕКЦИЯ 21.

Твердое тело. Кинетический момент , кинетическая энергия. Тензор инерции, эллипсоид инерции, главные оси и главные моменты инерции.

ЛЕКЦИЯ 22.

Уравнения Эйлера. Случай Эйлера. Описание движения по Пуансо.

ЛЕКЦИЯ 23.

Волчек Лагранжа, Углы Эйлера. Процессия и нутация.

ЛЕКЦИЯ 24.

Спящий волчек и быстрый волчек.

ЛЕКЦИЯ 25,26.

Внешние формы. Внешнее умножение.

ЛЕКЦИИ 27,28.

Дифференциальные формы. Интегрирование дифференциальных форм.

ЛЕКЦИЯ 29.

Внешнее дифференцирование. Формула Ньютона-Лейбница-Гуасса-Грина-Остроградского-Пуанкаре.

ЛЕКЦИЯ 30.

Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана. Канонические отображения.

ЛЕКЦИЯ 31.

Следствия из теоремы об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана:

1.Замены переменных в канонических уравнениях.

2.Понижение порядка с помощью интеграла энергии.

3. Принцип наименьшего действия в фазовом пространстве.

4,Принцип наименьшего действия в форме Монертюн-Эйлера-Лагранжа Якоби. Геодезические линии.

ЛЕКЦИЯ 32.

Принцип Гюйченса. Функция действия. Уравнение Гамильтона-Якоби.

ЛЕКЦИЯ 33.

Метод Гамильтона-Якоби. Производящая функция канонического преобразования.

ЛЕКЦИЯ 34.

Симплетическая геометрия. Симплетические преобразования.

ЛЕКЦИЯ 35.

Параметрический резонанс в системах со многими степенями свободы.

ЛЕКЦИЯ 36.

Производящие функции. Бесконечно-малые канонические преобразования. Канонические многообразия.

ЛЕКЦИИ 37,38.

Скобки Пуассона и алгебры Ли векторных полей. Теорема Пуассона.

ЛЕКЦИЯ 39.

Интегрируемые системы. Теорема Лиувилля об интегрируемости канонической системы.

ЛЕКЦИЯ 40.

Переменные действия - угол.

ЛЕКЦИЯ 41.

Пространственное и временное среднее.

ЛЕКЦИЯ 42.

Неинтегрируемые системы. Принцип усреднения. Аднабатические инварианты.

Эти лекции читались студентам 2-3 курса механико-математического факультета МГУ в 1966-1967 учебном году.

Записи лекций подготовлены к печати Н.Н.Колесниковым,а также Л.А.Бунимовичем,Л.Д.Вайнгортиным и В.Л.Новиковым, которым я выражаю свою благодарность.

В. АРНОЛЬД

ПОДП. К ПЕЧАТИ 13/V-68 Г. ФОРМАТ 60х90/16
ФИЗ.П.Л. 9,25. УЧ.-ИЗД.Л. 6,5. ЗАКАЗ 1427
ТИРАЖ 1000 ЭКЗ. ЦЕНА 18 КОП.

ОТП. НА РОТАПРИНТАХ В ТИП. ИЗД-ВА МГУ
МОСКВА, ЛЕНГОРЫ.

Цена 18 коп.